Chapitre ⑤ : Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnus

I – Système de deux équations du premier degré à deux inconnues :

1) Définition :

Soient a, a', b, b', c et c' des nombres réels.
On appelle système de deux équations du premier degré à deux inconnues, toute écriture de la forme : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$
d'inconnues x et y

2) Exemples

On considère les systèmes suivants :

$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ et $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 3y - \frac{2}{3} = 0 \\ -3x + y + 2 = 0 \end{cases}$

II – La résolution des systèmes :

1) Définition :

* Résoudre un système, c'est trouver tous les couples (x, y) (s'ils existent) pour lesquels les deux équations sont vérifiées simultanément.

* La résolution des systèmes se divise en deux partie :
  - La résolution algébrique : on a deux méthodes :
    → Méthode de substitution
    → Méthode de combinaison linéaire.
  - La résolution graphique

2) La résolution algébrique d'un système :

a – Méthode de substitution :

Définition : Cette méthode consiste à exprimer l'un des inconnues en fonction de l'autre dans une des équations, et le remplacer dans l'autre équation pour trouver une équation à une inconnue.

* **Remarque :**
On utilise de préférence la méthode par substitution lorsque l'une des deux inconnues a pour coefficient 1 ou −1

* **Exemples**
Résolvons le système $\begin{cases} 2x + y = 11 & ① \\ x + 3y = 18 & ② \end{cases}$ (S)

→ Dans l'équation ①, on écrit y en fonction de x
donc $y = 11 - 2x$ ③
→ On substitue y dans l'équation ②, on trouve :

$$x + 3(11 - 2x) = 18$$
$$x + 33 - 6x = 18$$
$$-5x = 18 - 33$$
$$-5x = -15$$
$$x = \frac{-15}{-5}$$
$$x = 3$$

→ On remplace x par 3 dans l'équation ③ :
$y = 11 - 2 \times 3 = 11 - 6 = 5$
Donc le couple $(3; 5)$ est la solution du système (S)

b – Méthode de combinaison linéaire :

* **Définition :** Cette méthode consiste à multiplier chaque équation du système par un nombre convenable pour trouver deux coefficients

opposés pour la même inconnue, après on additionne les deux équations trouvées membre à membre pour arriver à une équation du premier degré à une inconnue.

* **Remarque :**

On utilise de préférence la méthode de combinaison linéaire si on a deux termes opposés pour la même inconnue.

* **Exemple :** Résolvons le système $\begin{cases} -5x+4y=-1 & (1) \\ 3x-2y=1 & (2) \end{cases}$

* Élimination de y :

→ On multiplie les membres de l'équation (2) par 2 ;

donc $\begin{cases} -5x+4y=-1 \\ 6x-4y=2 \end{cases}$

→ On ajoute ces équations membres à membre :

$$-5x+\cancel{4y}+6x-\cancel{4y}=-1+2$$
$$x=1$$

* Élimination de x

→ On multiplie les membres de l'équation (1) par 3 et les membres de l'équation (2) par 5

$\begin{cases} -15x+12y=-3 \\ 15x-10y=5 \end{cases}$

→ On ajoute ces équations membre à membre :

$$-\cancel{15x}+12y+\cancel{15x}-10y=-3+5$$
$$2y=2$$
$$y=\frac{2}{2}$$
$$y=1$$

Donc le couple $(1;1)$ est la solution du système

* **Technique (2) :**

Dans l'étape (2), au lieu d'éliminer x par la combinaison linéaire, on remplace juste dans l'une des équations.

On a $x=1$

On remplace dans l'équation (2) :

$$3\times 1-2y=1$$
$$3-2y=1$$
$$-2y=1-3$$
$$-2y=-2$$
$$y=\frac{-2}{-2}=1$$

On trouve donc le même couple $(1;1)$

* **Remarque :**

On doit respecter la méthode demandée par l'exercice.

3) La résolution graphique :

a - Définition :

Cette méthode consiste à lier chaque équation du système par une droite, et déterminer le couple de coordonnées de leur point d'intersection (s'ils se coupent), cela dans un repère orthonormé, alors ce couple est la solution du système.

b - Exemples :

* **Exemple (1) :** Résolvons le système $(S_1)\begin{cases} 4x-y-2=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$

→ **Pas (1) :** Trouver les équations réduites :

On a : $4x-y-2=0$ donc $y=4x-2$

On a $2x-y+2=0$ donc $y=2x+2$

On considère les deux droites (D_1) et (D_2) telles que :

$\begin{cases} (D_1) : y=4x-2 \\ (D_2) : y=2x+2 \end{cases}$

On remarque que les deux droites (D_1) et (D_2) n'ont pas la même pente, donc elles sont sécantes.

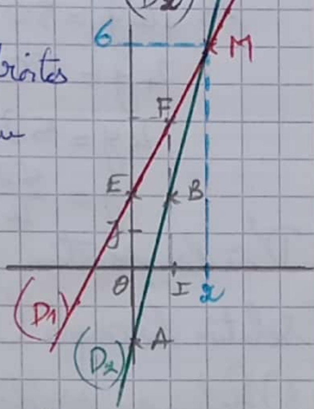
→ **Pas ②: La représentation des droites (D_1) et (D_2)**

x	0	1
y	2	4
$M(x;y)$	$E(0;2)$	$F(1;4)$

(D_1)

x	0	1
y	-2	2
$M(x;y)$	$A(0;-2)$	$B(1;2)$

(D_2)



On remarque que les deux droites (D_1) et (D_2) se coupent au point $M(2;6)$

⇒ alors le couple $(2;6)$ est la solution du système.

* **Exemple ②:** Résolvons : $\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ 4x+2y=2 \end{cases}$

On considère les droites (D) et (Δ) telle que :

$(D): 2x+y-1=0$ et $(\Delta): 4x+2y=2$

Cherchons les équations réduites des droites (D) et (Δ)

On a $\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ 4x+2y=2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} y=-2x+1 \\ 2y=-4x+2 \end{cases}$

$\begin{cases} y=-2x+1 \\ y=\dfrac{-4x+2}{2}=-2x+1 \end{cases}$

Alors $\begin{cases} (D): y=-2x+1 \\ (\Delta): y=-2x+1 \end{cases}$

On remarque que les deux droites (D) et (Δ) ont la même équation réduite.

Donc (D) et (Δ) sont deux droites confondues.

Alors le système admet une infinité de solutions $(x;y)$

* **Exemple ③:** Résolvons $\begin{cases} 3x+y-5=0 \\ 6x+2y+1=0 \end{cases}$

On considère les droites (D) et (Δ) telle que :

$(D): 3x+y-5=0$ et $(\Delta): 6x+2y+1=0$

Cherchons les équations réduites des droites (D) et (Δ)

On a $\begin{cases} 3x+y-5=0 \\ 6x+2y+1=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} y=-3x+5 \\ 2y=-6x-1 \end{cases}$

$y=-3x+5$

$y=\dfrac{-6x+1}{2}=-3x+\dfrac{1}{2}$

Alors $\begin{cases} (D): y=-3x+5 \\ (\Delta): y=-3x+\dfrac{1}{2} \end{cases}$

On remarque que les deux droites (D) et (Δ) ont la même pente (mais pas la même ordonnée à l'origine)

Donc : (D) et (Δ) sont strictement parallèles.

D'où ce système n'admet pas de solutions.

c – Propriété récapitulative :

On considère les deux droites :

$(D): y=mx+p$ et $(\Delta): y=m'x+p'$

- $m \neq m'$: (D) et (Δ) sont sécantes en un seul point A. Alors le système admet unique solution $(x_A; y_A)$
- $m = m'$:
  - $p = p'$ ⇓ $(D)=(\Delta)$ ⇓ le système admet infinité de solutions
  - $p \neq p'$ ⇓ $(D) // (\Delta)$ ⇓ le système n'admet pas de solution.

III – Systèmes et problèmes :

1) Règle :

La résolution d'un problème se déroule en 4 étapes :

1) Choix des inconnues : trouvés à la question
2) Mise en système : Transformation des données en équations
3) Résolution du système : algébriquement
4) Retour au problème : vérification de la solution et réponse à la question.

3) Exemple :

Une usine fabrique deux sortes d'objets : A et B

L'objet A nécessite 2 kg d'acier et 3 heures de fabrication.

L'objet B nécessite 4 kg d'acier et 2 heures de fabrication.

Combien d'objets de chaque sorte a-t-on fabriqué en 68 heures de travail en utilisant 80 kg d'acier ?

Solution :

1) Choix des inconnues :

Soient x le nombre d'objet A

y le nombre d'objet B

2) Mise en système :

Puisque l'objet A nécessite 2 kg d'acier et l'objet B nécessite 4 kg d'acier alors : l'ensemble d'objets fabriqués utilisant 80 kg d'acier : $2x+4y=80$

• Puisque l'objet A nécessite 3 h de fabrication et que l'objet B nécessite 2 h de fabrication alors : l'ensemble d'objets fabriqués en 68 h est : $3x+2y=68$

D'où le système est $\begin{cases} 2x+4y=80 \\ 3x+2y=68 \end{cases}$

3) Résolution du système :

On a $\begin{cases} ① \; 2x+4y=80 \\ ② \; 3x+2y=68 \end{cases}$

On multiplie l'équation ② par -2

donc $\begin{cases} 2x+4y=80 \\ -6x-4y=-136 \end{cases}$

On ajoute les équations membre à membre

$2x+4y-6x-4y=80-136$

$-4x=-56$

$x=\frac{-56}{-4}=14$

On remplace dans l'équation ①, donc :

$2\times14+4y=80$

$28+4y=80$

$4y=80-28$

$4y=52$

$y=\frac{52}{4}=13$

D'où le système admet pour unique solution le couple $(14;13)$

4) Retour au problème :

On a $\begin{cases} 2\times14+4\times13=28+52=80 \\ 3\times14+2\times13=42+26=68 \end{cases}$

Alors :

le nombre d'objets A fabriqués est : 14

le nombre d'objets B fabriqués est : 13