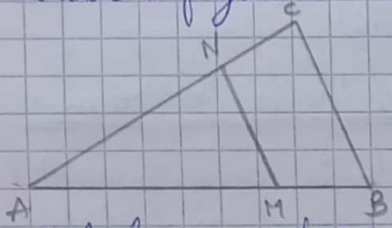
Chapitre ④ : Théorème de Thalès

I. Théorème de Thalès direct :

1) Activité ① :

On considère la figure ci-dessous telque $(MN)//(BC)$



$AM = 3$, $AB = 8$

$MN = 1,5$ et $AC = 4$

Calculer AN et BC

Solution :

On considère le triangle ABC

On a $\begin{cases} M \in [AB] \\ N \in [AC] \end{cases}$ telque $(MN)//(BC)$

donc d'après ~~la propo du prod~~ Thalès

On a $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

càd $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ et $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC}$

donc $\dfrac{3}{8} = \dfrac{AN}{4}$ et $\dfrac{3}{8} = \dfrac{1,5}{BC}$

$AN = \dfrac{3\times4}{8} = \dfrac{3}{2}$ et $BC = \dfrac{8\times1,5}{3} = 4$

2) Exemple :

(D) et (Δ) deux droites sécantes en A

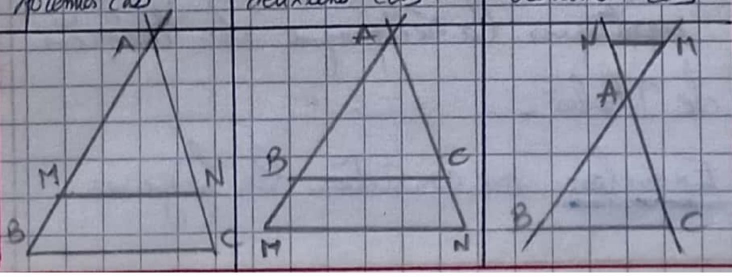
Soient B et M deux points de la droite (D) distincts A et soient C et N deux points de la droite (Δ) distincts du point A

telque : $(MN)//(BC)$

Dans les trois cas, on a :

$\begin{cases} * \ A, M \text{ et } B \text{ points alignés} \\ * \ A, N \text{ et } C \text{ points alignés} \\ * \ (MN)//(BC) \end{cases}$

premier cas	deuxième cas	troisième cas



Dans tous les cas, on aura :

$\boxed{\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}}$ ← longueurs du triangle AMN ← longueurs du triangle ABC

3) Théorème de Thalès directe

(D) et (Δ) deux droites sécantes en A

Soient B et M deux points de la droite (D) distinct du point A

Soient C et N deux points de la droite (Δ) distinct du point A

Si $(BC)//(MN)$ alors :

$\boxed{\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}}$

4) Application sur le triangle :

a – Propo ① :

ABC un triangle

Si $\begin{cases} M \in (AB) \\ N \in (AC) \end{cases}$ telque $(MN)//(BC)$

alors : $\boxed{\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}}$

b – Remarques :

* Le théorème de Thalès directe nécessite deux conditions, à savoir l'appartenance et parallélisme et donne la triple égalité.
* On utilise le Théorème de Thalès directe pour calculer les longueurs.

c – Exemple :

ABC un triangle telque :

$AB = 6cm$, $AC = 4cm$ et $BC = 5cm$

Soit E un point de $[AB]$ telque $AE = 2cm$

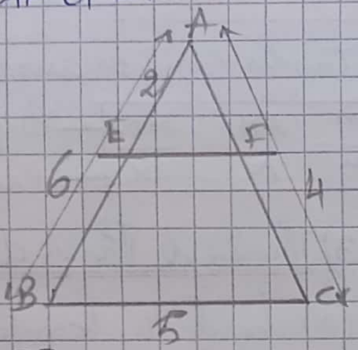
La parallèle à (BC) passant par E

Coupe $[AC]$ en F

1) Construire la figure
2) Calculer AF et EF

Solution:

1) figure



2) Calcul de AF et EF

On considère le triangle ABC

On a $\begin{cases} E \in (AB) \\ F \in (AC) \end{cases}$ tel que $(EF) \parallel (BC)$

Donc d'après le théorème de Thalès direct, on a : $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$

$\frac{2}{6} = \frac{AF}{4} = \frac{EF}{5}$

$\frac{2}{6} = \frac{AF}{4}$ et $\frac{2}{6} = \frac{EF}{5}$

$AF = \frac{2\times4}{6} = \frac{4}{3}$ et $EF = \frac{2\times5}{6} = \frac{5}{3}$

$\boxed{AF = \frac{4}{3}\text{ cm}}$ et $\boxed{EF = \frac{5}{3}\text{ cm}}$

II. La réciproque du théorème de Thalès :

1) Activité ② :

ABC un triangle tel que $AB=4$ et $AC=6$

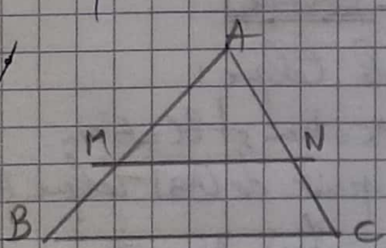
M et N deux points de [AB] et [AC] respectivement

tels que $AM=2$ et $AN=3$

1) Construire la figure
2) Montrer que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$
3) Montrer que $(MN) \parallel (BC)$

Solution:

1/



2/ On a $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

3) On considère le triangle ABC

On a $\begin{cases} * \ M \text{ milieu de } [AB] \\ * \ N \text{ milieu de } [AC] \end{cases}$

Donc d'après la propo ① du chapitre triangle et droites parallèles, on a :

$(MN) \parallel (BC)$

2) Théorème de Thalès réciproque :

(D) et (Δ) deux droites sécantes en A

B et M deux points de (D) distinct de A

C et N deux points de (Δ) distinct de A

Si les points A, M et B et les points A, N et C ont le même ordre tel que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

alors $(MN) \parallel (BC)$

3) Application sur le triangle :

a - propo ② :

ABC un triangle

Si $\begin{cases} M \in (AB) \\ N \in (AC) \end{cases}$ et les points A, M et B et les points A, N et C ont le même ordre

tel que

Alors $(MN) \parallel (BC)$

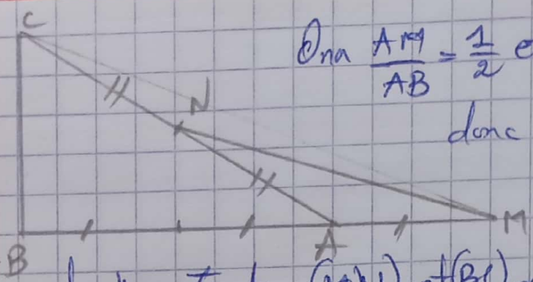
*** Remarques :**

1) Le théorème de Thalès réciproque nécessite trois conditions (appartenance + ordre des points + égalité) et donne le parallélisme.

2) On utilise la réciproque du théorème de Thalès pour prouver le parallélisme

3) La condition de l'ordre des points sur chaque droite est nécessaire pour appliquer la réciproque du théorème de Thalès.

Exemple : on considère la figure :



On a $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$

donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

et pourtant (MN) et (BC) ne sont pas parallèles
car l'ordre des points A, N et C
est différent de l'ordre des points A, M et B

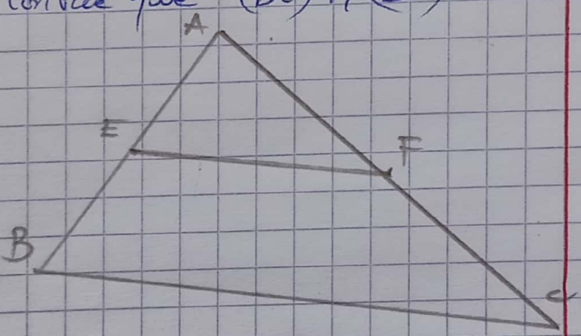
b- Exemples

ABC un triangle tel que $AB = 4\,cm$ et $AC = 6\,cm$
E un point de $[AB]$ tel que $AE = 2\,cm$
F un point de $[AC]$ tel que $AF = 3\,cm$

1) Construire la figure
2) Montrer que $(BC) \parallel (EF)$

Solution :

1) figure



2) On a $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $\frac{AF}{AC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

donc $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

On considère le triangle ABC

On a $\begin{cases} E \in (AB) \\ F \in (AC) \end{cases}$ et les points A, E et B et les points A, F et C ont le même ordre

et puisque : $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

Donc d'après le théorème de Thalès réciproque on a : $(EF) \parallel (BC)$