Direction provinciale : Khemisset	Série d'exercices N°5-3APIC-S2	Année Scolaire : 2019/2020
Etablissement : Mohammed ELQOURI	Chapitre : Les systèmes	Prof : LAHSAINI Yassin

Exercice1 :

1- On considère le système suivant :(E) $\begin{cases} x+y=-2 & ❶ \\ 2x-3y=-9 & ❷ \end{cases}$

   a- Le couple $\left(1\,;\frac{11}{3}\right)$ est-il solution de l'équation ❷ ? de l'équation ❶ ? du système ?

   b- $(-3\,;\,1\,)$ est-il solution de l'équation ❷ ? de l'équation ❶ ? du système ?

   c- Le couple $(4;-6)$ est-il solution de l'équation ❶ ? de l'équation ❷ ? du système ?

2- Résolvons le système (E) par : a) la substitution b) la combinaison linéaire.

3- a) Montrons que le système (E) peut s'écrire sous la forme (E)$\begin{cases} y=-x-2 \\ y=\frac{2}{3}x+3 \end{cases}$

   b) Résolvons phraphiquement le système (E).

Correction :

1- a) pour le couple $\left(1\,;\frac{11}{3}\right)$ on a $x=1$ *et* $y=\frac{11}{3}$ alors $2x-3y=2\times1-3\times\frac{11}{3}=2-11=-9$ d'où le couple $\left(1\,;\frac{11}{3}\right)$ est une solution de l'équation ❷.Et $x+y=1+\frac{11}{3}=\frac{3}{3}+\frac{11}{3}=\frac{3+11}{3}=\frac{14}{3}\neq-2$ alors le couple $\left(1\,;\frac{11}{3}\right)$ n'est pas une solution de l'équation ❶ d'où le couple $\left(1\,;\frac{11}{3}\right)$ n'est pas une solution du système (E).

b) pour le couple $(-3\,;\,1\,)$ on a $x=-3$ *et* $y=1$ alors $2x-3y=2\times(-3)-3\times1=-6-3=-9$ d'où le couple $(-3;1)$ est une solution de l'équation ❷.Et $x+y=-3+1=-2$ d'où le couple $(-3\,;\,1\,)$ est une solution de l'équation ❶ alors le couple $(-3\,;\,1\,)$ est une solution du système (E).

c) pour le couple $(4;\,-6\,)$ on a $x=4$ *et* $y=-6$ alors $x+y=4-6=-2$ d'où le couple $(4\,;\,-6)$ est une solution de l'équation ❶.Et $2x-3y=2\times4-3\times(-6)=8+18=26\neq-9$ alors le couple $(4;\,-6)$ n'est pas une solution de l'équation ❷. D'où le couple $(4;\,-6)$ n'est pas une solution du système (E).

2-

a) Résolution du système (E) par la substitution

D'après l'équation ❶ on a $y=-2-x$

dans l'équation ❷ je remplace y par $-2-x$ je trouve

$2x-3(-2-x)=-9$ je développe $2x+6+3x-9$

je réduis $5x=-9-6$,je divise par 5 alors $\frac{5x}{5}=\frac{-15}{5}$ d'où

$x=-3$.On a $y=-2-x$ alors

$y=-2-(-3)=-2+3=1$ d'où $y=1$.

Le couple $(-3\,;\,1\,)$ est la solution unique du système (E).

b) Résolution du système (E) par la combinaison linéaire.

(E)$\begin{cases} -2(x+y=-2) \\ 2x-3y=-9 \end{cases}$; $\begin{cases} -2x-2y=4 \\ 2x-3y=-9 \end{cases}$

J'additionne les deux équations membre à membre je trouve : $-2x-2y+2x+(-3y)=4+(-9)$

$-2y-3y=4-9$ alors $-5y=-5$, je simplifie par 5 je trouve $y=1$. D'après l'équation ❶ on a $x=-2-y=-2-1$ d'où $x=-3$.

Le couple $(-3\,;\,1\,)$ est la solution unique du système (E).

3-

a) $x+y=-2$ équivalent à : $y=-x-2$

$2x-3y=-9$ équivalent à: $-3y=-2x-9$ je divise par-3 :$\frac{-3y}{-3}=\frac{-2x}{-3}-\frac{9}{-3}$ d'où $y=\frac{2}{3}x+3$

Finalement (E)$\begin{cases} y=-x-2 \\ y=\frac{2}{3}x+3 \end{cases}$

b) Pour résoudre graphiquement le système (E) je dois représenter les deux droites d'équations réduites :

$(d):y=-x-2$ et $(D):y=\frac{2}{3}x+3$ dans un repère (O ; I ; J).

❖ $(d):y=-x-2$;Si $x=0$ alors $y=-0-2=-2$

Si $x=-2$ alors $y=-(-2)-2=2-2=0$

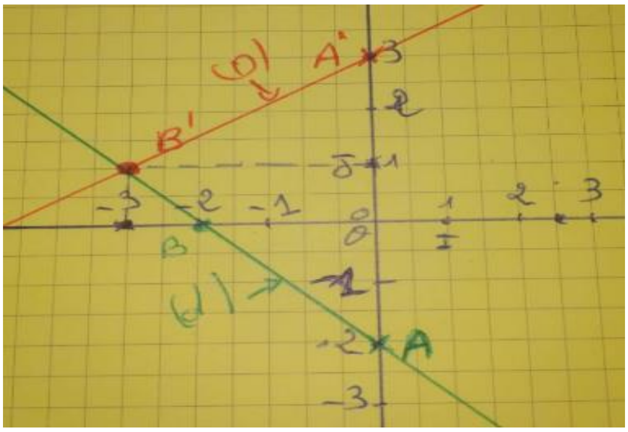
La droite (d) passe par les deux points $A(0,-2)$et $B(-2,0)$

❖ $(D):y=\frac{2}{3}x+3$; si Si $x=0$ alors $y=\frac{2}{3}\times0+3=3$

Si $x=-3$ alors $y=\frac{2}{3}\times(-3)+3=-2+3=1$

La droite (D) passe par les deux points $A'(0,3)$et $B'(-3,1)$

Je trace les deux droites dans un repère (O,I,J)



Les coordonnées du point d'intersection des deux droits sont :$x=-3$ et $y=1$.

Le couple $(-3\,;\,1\,)$ est la solution unique du système (E).

Exercice2 : On considère le système $(S)\begin{cases} 2ax - by = 3 \\ ax + by = 2 \end{cases}$; a et b sont deux nombres réels.

1- Déterminons a et b pour que le couple $(1,1)$ soit la solution unique du système (S).

Correction :

2- Si le couple (1,1) est la solution unique du système alors il devient : $(S)\begin{cases} 2a - b = 3 & ❶ \\ a + b = 2 & ❷ \end{cases}$;$(x = 1 \; et \; y = 1)$

❖ Résolution par la substitution

D'après l'équation ❷ on $a = 2 - a$, je remplace b par $2 - a$ dans l'équation ❶ je trouve $2a - (2 - a) = 3$, je développe $2a - 2 + a = 3$,je simplifie $3a = 3 + 2$,je divise par 3 je trouve $\frac{3a}{3} = \frac{5}{3}$ d'où $a = \frac{5}{3}$.

On a : $b = 2 - a$, remplace a par $\frac{5}{3}$ alors $b = 2 - \frac{5}{3} = \frac{2\times3}{3} - \frac{5}{3} = \frac{6-5}{3} = \frac{1}{3}$ d'où $b = \frac{1}{3}$.

Finalement pour que le couple (1,1) soit la solution unique du système (S) il faut que $a = \frac{5}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$

❖ Résolution par la combinaison linéaire :

Je multiplie l'équation ❷ par (-2) le système (S) devient :$(S)\begin{cases} 2a - b = 3 & ❶ \\ -2a - 2b = -4 & ❷ \end{cases}$

J'additionne les deux équations membre à membre :$2a - b + (-2a) + (-2b) = 3 + (-4)$, je réduis $-3b = -1$,je divise par -3 je trouve $b = \frac{1}{3}$.Dans l'un des deux équations (❷ par exemple)je remplace b par $\frac{1}{3}$ alors $a = 2 - b = 2 - \frac{1}{3} = \frac{2\times3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{6-1}{3} = \frac{5}{3}$ d'où $a = \frac{5}{3}$

Finalement pour que le couple (1,1) soit la solution unique du système (S) il faut que $a = \frac{5}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$.

Exercice3 : Résolvons les systèmes suivants :

$(S_1): \begin{cases} (\sqrt{3} - \sqrt{2})x + y = \sqrt{2} \\ x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})y = \sqrt{6} \end{cases}$; $(S_2) \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

Correction :

❖ $(S_1): \begin{cases} (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \, /[(\sqrt{3} - \sqrt{2})x + y = \sqrt{2}] \\ x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})y = \sqrt{6} \end{cases}$ Je développe : $(S_1)\begin{cases} (\sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2)x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})y = \sqrt{2}\,(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \\ x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})y = \sqrt{6} \end{cases}$

Je simplifie : $\begin{cases} x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})y = \sqrt{6} + 2 \\ x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})y = \sqrt{6} \end{cases}$; Impossible

Le système (S_1) n'admet pas de solution car le même terme : $x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})y$ est égale à la fois deux valeurs différentes $\sqrt{6}+2$ et $\sqrt{6}$

❖ Pour (S_2) j'additionne les deux équations membre à membre : $2x^2 - y^2 + x^2 + y^2 = 1 + 2$ je simplifie :$3x^2 = 3$ je divise par 3 je trouve : $x^2 = 1$ d'où $x = \sqrt{1} = 1$ ou $x = -\sqrt{1} = -1$alors $x = 1$ ou $x = -1$

D'après l'équation 2 on a $y^2 = 2 - x^2$ alors :

- ✓ Si $x = 1$: $y^2 = 2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$ alors $y^2 = 1$ signifie $y = 1$ ou $y = -1$ alors les couples (1 ;1) et (1 ;-1) sont des solutions du système (S_2)
- ✓ Si $x = -1$: $y^2 = 2 - (-1)^2 = 2 - 1 = 1$ alors $y^2 = 1$ signifie $y = 1$ ou $y = -1$ alors les couples (-1 ;1) et (-1 ;-1) sont des solutions du système (S_2)

Finalement le système (S_2) admet quatre solutions : (1 ,1), (1,-1), (-1,1)et (-1,-1).

Exercice 4:

Dans le plan menu d'un repère orthonormée (O,I,J),on considère les points des coordonnées suivantes : $A(4,-2)$,$B(3,3)$ et $C(0,-3)$

1- Montrons que $y = 2x - 3$ est l'équation réduite de la droite (BC),puis déduirons que les point A,B et C ne sont pas alignés.

2- Montrons que $y = -5x + 18$est l'équation réduite de la droite (AB).

3- Montrons que les coordonnées du point H l'orthocentre du triangle ABC sont : $H(\frac{30}{7}, \frac{-15}{7})$

Correction :

1- $B(3,3)$ et $C(0;-3) \in (BC)$ alors $a = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{3-(-3)}{3-0} = \frac{3+3}{3} = \frac{6}{3} + 2$ alors $(BC): y = 2x + b$

$B(3,3) \in (AB)$ alors $y_B = 2y_B + b$ singifie $3 = 2 \times 3 + b$ alors $3 - 6 = b$ d'où $b = -3$

Finalement l'équation réduite de (BC) est (BC): $y = 2x - 3$

Si $x = x_A = 4$ alors $y = 2 \times 4 - 3 = 8 - 3 = 5 \neq -2 = y_A$ d'où $A \notin (BC)$ alors les points A , B et C ne sont pas alignés

2- $A(4,-2)$ et $B(3,3)\in(AB)$ alors $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-(-2)}{3-4}=\frac{3+2}{-1}=-5$ alors $(AB): y=-5x+b$

$B(3,3)\in(AB)$ alors $y_B=-5y_B+b$ signifie $3=-5\times3+b$ alors $3+15=b$ d'où $b=18$

Finalement l'équation réduite de (AB) est (AB): $y=-5x+18$

3- On sait que l'orthocentre est le point d'intersection des hauteurs du triangle alors les coordonnées de H vérifient les équations réduites des hauteurs du triangle ABC.

- L'équation réduite de (Δ) la hauteur issue de A.
  - ✓ On a $(\Delta)\perp(BC)$ alors $2\times a=-1$, je divise par 2 je trouve $a=\frac{-1}{2}$ d'où $(\Delta): y=\frac{-1}{2}x+b$
  - ✓ $A(4,-2)\in(\Delta)$ alors $y_A=\frac{-1}{2}x_A+b$ signifie : $-2=\frac{-1}{2}\times4+b$ alors $-2=-2+b$ par suite $-2+2=b$ d'où b=0
  - ✓ L'équation réduite de(Δ) la hauteur issue de A est (Δ): $y=\frac{-1}{2}x$
- L'équation réduite de (Δ') la hauteur issue de C.
  - ✓ $(\Delta')\perp(AB)$ alors $-5\times a=-1$, je divise par -5 je trouve $a=\frac{1}{5}$ d'où $(\Delta'): y=\frac{1}{5}x+b$
  - ✓ $C(0,-3)\in(\Delta')$ alors $y_C=\frac{1}{5}x_C+b$ signifie : $-3=\frac{1}{5}\times0+b$ d'où $b=-3$
  - ✓ L'équation réduite de (Δ') la hauteur issue de C est (Δ'): $y=\frac{1}{5}x-3$
- $H(x_H,y_H)\in(\Delta)$ signifie $y_H=\frac{-1}{2}x_H$ et $(x_H,y_H)\in(\Delta')$ signifie $y_H=\frac{1}{5}x_H-3$d'où le système (S) $\begin{cases} y_H=\frac{-1}{2}x_H \\ y_H=\frac{1}{5}x_H-3\end{cases}$

Dans la deuxième équation Je remplace y_H par $\frac{-1}{2}x_H$: $\frac{-1}{2}x_H=\frac{1}{5}x_H-3$ alors $\frac{-1}{2}x_H-\frac{1}{5}x_H=-3$

$\frac{-1\times5}{2\times5}x_H-\frac{1\times2}{5\times2}x_H=\frac{-3\times10}{10}$,je simplifie par 10 et je réduis :$-5x_H-2x_H=-30$ par suite $-7x_H=-30$,je divise par -7 je trouve que $x_H=\frac{30}{7}$.

On a $y_H=\frac{-1}{2}x_H$ alors $y_H=\frac{-1}{2}\times\frac{30}{7}=\frac{-30}{2\times7}=\frac{-15\times2}{2\times7}=\frac{-15}{7}$ d'où $y_H=\frac{-15}{7}$

Finalement les coordonnées du point H l'orthocentre du triangle ABC sont : $H(\frac{30}{7},\frac{-15}{7})$.

Exercice 5:

1- Trouvons deux nombres dont la somme est égale à 10273 et la différence est égale à 2589.

2- Le périmètre d'un rectangle est 24 cm.Si on augmente la longueur de 2 cm et la largeur de 3cm l'aire augmentera de 37 cm^2.calculons les dimensions initiales de ce rectangle.

Correction :

2)

- Choix des inconnues :
  - ✓ Longueur : x
  - ✓ Largeur : y
- Mise en système :
  - ✓ Le périmètre du rectangle : $2(x+y)=24$ je divise par 2 : $x+y=12$
  - ✓ L'aire du rectangle est : $x\times y$
  - ✓ La nouvelle aire :$(x+2)(y+3)=xy+37$, je développe $xy+3x+2y+6=xy+37$ je simplifie : $3x+2y=31$
  - ✓ D'où le système (S) : $\begin{cases} x+y=12 \\ 3x+2y=31\end{cases}$
- La résolution du système :

D'après l'équation 1 : $y=12-x$; je remplace y par $12-x$ dans l'équation 2 :

$3x+2(12-x)=31$, je développe :

$3x+24-2x=31$, je réduis : $x=7$

On a : $y=12-x$ alors $y=12-7$d'ou $y=5$

- La verification :
  - ✓ Le périmètre :$2(x+y)=2(7+5)=2\times12=24$
  - ✓ L'aire du rectangle est : $x\times y=7\times5=35cm^2$
  - ✓ La nouvelle aire :$(x+2)(y+3)=(7+2)(5+3)=72$

Or 72=35+37 alors la nouvelle aire est égale à l'ancienne aire plus 37

- Conclusion :

Les dimensions initiales de ce rectangle sont : la longueur est égale 7cm et la largeur est égale à 5 cm

1)

- Choix des inconnues :
  - ✓ Le premier nombre : x
  - ✓ Le deuxième nombre : y
- Mise en système :
  - ✓ La somme des deux nombres : $x+y=10273$
  - ✓ La différence des deux nombres : $x-y=2589$

D'où le système (S) : $\begin{cases} x-y=2589 \\ x+y=10273\end{cases}$

- La résolution du système :

J'additionne les deux équations membre à membre :

$x+y+x+(-y)=10273+2589$Je simplifie :

$2x=12862$, je divise par 2 je trouve que $x=6431$

On a $y=10273-x=10273-6431$ d'où $y=3842$

- La verification :

$x+y=$6431+3842=10273

$x-y=$6431-3842=2589

- Conclusion :

Deux nombres dont la somme est égale à 10273 et la différence est égale à 2589 sont : 6431 et 3842