Chapitre ④ : Equation d'une droite

L'équation réduite d'une droite

Définition

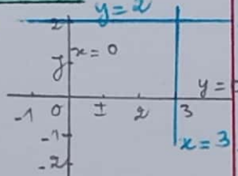
l'équation réduite de la droite (D) est de la forme : $y = mx + p$

m : coefficient directeur (pente)

p : l'ordonnée à l'origine

Cas particuliers

* l'équation de l'axe des abscisses est : $y = 0$
* l'équation de l'axe des ordonnées est : $x = 0$
* l'équation de la droite horizontale passante par le point $M(a;b)$ est : $y = b$



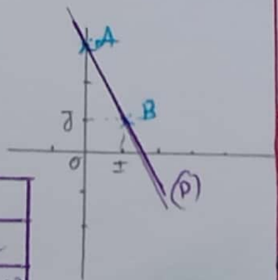
* l'équation de la droite verticale passante par le point $M(a,b)$ est : $x = a$

* **Construction d'une droite définie par son équation :**

On considère la droite : $(D) : y = -2x + 3$

pour construire la droite (D), on se base sur le tableau suivant : (deux points)

x	0	1
y	3	1
$M(x;y)$	$A(0,3)$	$B(1,1)$



Détermination de l'équation d'une droite

* **Pente d'une droite définie par deux points**

$A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ avec $x_A \neq x_B$

la pente de la droite (AB) est : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$m = \dfrac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}$

En gardant l'ordre

Equation caractéristique d'une droite définie par deux points

On considère $A(1,-2)$ et $B(-2,3)$

l'équation réduite de la droite (AB) s'écrit sous la forme : $(AB) : y = mx + p$

Déterminons m

On a $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-(-2)}{-2-1} = -\dfrac{5}{3}$

$(AB) : y = -\dfrac{5}{3}x + p$

Déterminons p

On a $A \in (AB)$

$\Rightarrow y_A = -\dfrac{5}{3}x_A + p$

$-2 = -\dfrac{5}{3} \times 1 + p$

$\Rightarrow p = -\dfrac{1}{3}$

$\boxed{(AB) : y = -\dfrac{5}{3}x - \dfrac{1}{3}}$

Equation réduite d'une droite définie par sa pente et un point

Déterminons l'équation réduite de la droite (Δ) de pente 3 et passante par $E(2;-1)$

l'équation réduite de la droite (Δ) est :

$(\Delta) : y = 3x + p$

On a $E \in (\Delta)$

$\Rightarrow y_E = 3x_E + p$

$-1 = 3 \times 2 + p \Rightarrow p = -7$

$\boxed{(\Delta) : y = 3x - 7}$

Parallélisme et orthogonalité de deux droites

Condition de parallélisme

deux droites sont parallèles si et seulement si ils ont la même pente

$(D) : y = mx + p$ et $(D') : y = m'x + p'$

$(D) \parallel (D')$ équivalent à $m = m'$

* **Exemple**

On considère la droite : $(D) : y = 2x - 1$

Déterminons l'équation de la droite (Δ) passante par $A(-1,2)$ et parallèle à (D)

* l'équation réduite de (Δ) est :

$(\Delta) : y = mx + p$

On a $(\Delta) \parallel (D)$

donc $m = 2$

$\Rightarrow (\Delta) : y = 2x + p$

Comme $A \in (\Delta)$

donc $y_A = 2x_A + p$

$2 = 2 \times (-1) + p$

$\Rightarrow p = 4$

Alors $\boxed{(\Delta) : y = 2x + 4}$

* **Exemple**

On considère la droite $(D) : y = -4x + 3$

déterminons l'équation de la droite (Δ) passante par $B(0;-1)$ et perpendiculaire à (D)

* l'équation réduite de (Δ) est :

$(\Delta) : y = mx + p$

On a : $(\Delta) \perp (D)$

donc : $m \times -4 = -1$

$\Rightarrow m = \dfrac{-1}{-4} = \dfrac{1}{4}$

Alors : $(\Delta) : y = \dfrac{1}{4}x + p$

Condition d'orthogonalité

deux droites sont perpendiculaires si et seulement le produit de leurs pentes est égale à -1

$(D) : y = mx + p$ et $(D') : y = m'x + p'$

$(D) \perp (D')$ équivalent à $m \times m' = -1$

Comme $B \in (\Delta)$

$\Rightarrow y_B = \dfrac{1}{4}x_B + p$ c.à.d $-1 = \dfrac{1}{4} \times 0 + p$

$\Rightarrow p = -1$

Alors $\boxed{(\Delta) : y = \dfrac{1}{4}x - 1}$