Chapitre ①: Equations et inéquations

Equations du premier degré à une inconnue :

→ **Définition :** Toute égalité de la forme $ax+b=0$ s'appelle équation du premier degré à une inconnue x

→ **Résolution d'une équation**

* Dans une équation, on peut transmettre un terme d'un côté vers l'autre côté à condition de changer le signe de ce terme
* pour résoudre une condition, on place les termes inconnues dans un côté et les termes connus dans l'autre côté en appliquant la règle précédente.

Cas et techniques de résolution

Cas ①: Equation de type $ax+b=c$

L'équation $-3x+4=0$ est équivalente à
$-3x=-4$
$x=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$
la solution de cette équation est $\frac{4}{3}$

Cas ②: Equation de type $(ax+b)(cx+d)=0$

Propo : produit nul
l'équation $(ax+b)(cx+d)=0$ est équivalent à $ax+b=0$ ou $cx+d=0$

L'équation $(2x-7)(3x+1)=0$ est équivalent à
$2x-7=0$ ou $3x+1=0$
$x=\frac{7}{2}$ ou $x=-\frac{1}{3}$
les solutions de cette équation sont $-\frac{1}{3}$ et $\frac{7}{2}$

* **Cas ③:** Equations fractionnaires : on réduit au même dénominateur.
* **Cas ④:** Equations de type $x^2=a$: ça dépend du signe de a
* **Cas ⑤:** Equations avec factorisation : si on a facteur commun ou avec identités remarquables : On applique le produit nul
* **Cas ⑥:** Equations avec développement si on n'a pas un facteur commun

→ L'équation $3(2x-1)=6x+7$ est équivalente
$6x-3=6x+7$
$6x-6x=7+3$
$0=10$
donc cette équation n'a pas de solutions

→ L'équation $2x+5=2(x+1)+3$ est équ
$2x+5=2x+5$
$2x-2x=5-5$
$0x=0$
Donc tous les nombres réels sont solutions de cette équation

Inéquations du premier degré à une inconnue

→ **Définition :** Toute inégalité de la forme $ax+b\leq 0$ ou $ax+b<0$ s'appelle inéquation du premier degré à une inconnue x.

* **Remarques :**
  * Une inéquation peut contenir un des symboles $>$ ou $\geq$
  * Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient l'inégalité

→ **Résolution des inéquations :**

Cas ①: si $a>0$

Les solutions de l'inéquation $ax+b<0$ sont $x<\frac{-b}{a}$
On ne change pas le symbole
* L'inéquation $4x-5\leq 2x+3$ est équivalente
$4x-2x\leq 3+5$
$2x\leq 8$
$x\leq\frac{8}{2}$
$x\leq 4$
les solutions de cette inéquation sont les nombres réels inférieurs ou égale à 4

Cas ②: Si $a<0$

les solutions de l'inéquation $ax+b>0$ sont $x<-\frac{b}{a}$ on change le symbole
* L'inéquation $2x-6>7x-1$ est équ à
$2x-7x>-1+6$
$-5x>5$
$x<\frac{-5}{5}\Rightarrow x<-1$
tous les nombres réels strictement inférieurs à -1 sont solutions de cette inéquation.

Cas ③: Inéquations n'addmettant pas de solutions

L'inéquation $\frac{2x-5}{3}-\frac{x+1}{2}\geq\frac{x}{6}$ est équi
$0\geq 13$
ce qui est impossible
donc cette équation n'a pas de solutions

Cas ④: Inéquations addmettant infinité de solutions

$5(2x-1)-7x<3(x+1)$ est équivalente
$10x-5-7x<3x+3$
$0<8$
ce qui est toujours vrai
tous les nombres réels sont solutions de cette inéquation.

Résolution des problèmes :

Pas de résolution de problèmes

1) Choix de l'inconnue
2) Mise en équation : transformation des données en une équation.
3) Résolution de l'équation
4) Retour au problème : vérification et réponse aux questions

Problèmes attachés aux inéquations

Lorsqu'on trouve des expressions comme au moins, au plus, moins que, plus que, meilleur que, maximal - minimal ...) alors on utilise les inéquations.

Equations (Exercices)

Cas ①: Equations de type $ax+b=c$

1) L'équation $-3x+4=0$ est équivalente à

$$-3x=-4$$
$$x=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$

la solution de cette équation est $\frac{4}{3}$

2) $2x+5=2(x+1)+3$ est équivalent à

$$2x+5=2x+2+3$$
$$2x-2x=5-5$$
$$0x=0$$

Donc tous les nombres réels sont solutions de cette équation

3) $3(2x-1)=6x+7$ est équivalente à

$$6x-3=6x+7$$
$$6x-6x=7+3$$
$$0x=10$$

ce qui est impossible. Cette équation n'a pas de solution

Cas ②: Equations de type $(ax+b)(cx+d)=0$

1) L'équation $(x+1)(2x-3)=0$ est équivalente à

$$x+1=0 \text{ ou } 2x-3=0$$
$$x=-1 \text{ ou } x=\frac{3}{2}$$

Cette équation admet deux solutions -1 et $\frac{3}{2}$

2) L'équation $x^2-7x=0$ est équivalente à $x(x-7)=0$

$$x=0 \text{ ou } x-7=0$$
$$x=0 \text{ ou } x=7$$

Cette équation admet deux solutions 0 et 7

Cas ③: Equations fractionnaires

En général, pour résoudre ce genre d'équations, on réduit au même dénominateur.

1) L'équation $\frac{2x+1}{5}=\frac{x-1}{3}$ est équivalente à

$$3(2x+1)=5(x-1)$$
$$6x+3=5x-5$$
$$6x-5x=-5-3$$
$$x=-8$$

la solution de cette équation est -8

2) L'équation $\frac{2x+1}{5}-2=\frac{x-1}{3}$ est équivalente à

$$\frac{3(2x+1)-30}{15}=\frac{5(x-1)}{15}$$
$$6x+3-30=5x-5$$
$$6x-5x=-5-3+30$$
$$x=22$$

la solution de cette équation est 22

Cas ④: Equations de type $x^2=a$

Si $a>0$ on utilise l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

1) l'équation $x^2+12=2$ est équivalente à

$$x^2=2-12$$
$$x^2=-10$$

donc cette équation n'a pas de solution

2) $(2x-1)^2-9=0$ est équivalente à

$$(2x-1)^2-3^2=0$$
$$(2x-1-3)(2x-1+3)=0$$
$$(2x-4)(2x+2)=0$$
$$2x-4=0 \text{ ou } 2x+2=0$$
$$x=\frac{4}{2}=2 \text{ ou } x=\frac{-2}{2}=-1$$

cette équation admet deux solutions -1 et 2

Cas ⑤: Equation avec factorisation si on a facteur commun (peut être double)

1) $2x(x+\sqrt{2})-\sqrt{3}(x+\sqrt{2})=0$ est équivalente

$$(x+\sqrt{2})(2x-\sqrt{3})=0$$
$$x+\sqrt{2}=0 \text{ ou } 2x-\sqrt{3}=0$$
$$x=-\sqrt{2} \text{ ou } x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

cette équation admet deux solutions $-\sqrt{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $x^2+6x+9=0$ est équivalente à

$$x^2+2\times x\times 3+3^2=0$$
$$(x+3)^2=0$$
$$x+3=0$$
$$x=-3$$

cette équation admet unique solution -3

3) $25x^2-30x+9=0$ est équivalente à

$$(5x)^2-2\times 5x\times 3+3^2=0$$
$$(5x-3)^2=0$$
$$5x-3=0$$
$$5x=3$$
$$x=\frac{3}{5}$$

La solution de cette équation est $\frac{3}{5}$

4) $(x-1)(x+3)+x^2-1=0$ équivalente

$$(x-1)(x+3)+(x-1)(x+1)=0$$
$$(x-1)(x+3+x+1)=0$$
$$(x-1)(2x+4)=0$$
$$x-1=0 \text{ ou } 2x+4=0$$
$$x=1 \text{ ou } x=\frac{-4}{2}=-2$$

Cette équation admet deux solutions -2 et 1

Cas ⑥: Equations avec développement si on n'a pas un facteur commun

1) $x(x+3)=x^2-15$ est équivalente à

$$x^2+3x=x^2-15$$
$$x^2+3x-x^2=-15$$
$$x=\frac{-15}{3}$$
$$x=-5$$

La solution de cette équation admet unique solution -5

2) $2(3x+5)-3x=12-(2-4x)$

$$6x+10-3x=12-2+4x$$
$$6x-3x-4x=12-2-10$$
$$-x=-8$$
$$x=8$$

la solution de cette équation est 8

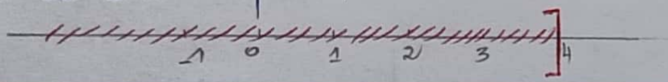
Inéquation (Exercices)

Cas ① : Si $a > 0$ alors les solutions de l'inéquation $ax+b<0$ sont $x < \frac{-b}{a}$. On ne change pas le symbole

L'inéquation $4x-5 \leqslant 2x+3$ est respectivement équivalente à

$$4x-2x \leqslant 3+5$$
$$2x \leqslant 8$$
$$x \leqslant \frac{8}{2}$$ On ne change pas l'ordre
$$x \leqslant 4$$

Donc tous les nombres réels inférieurs ou égale à 4 sont solutions de cette inéquation

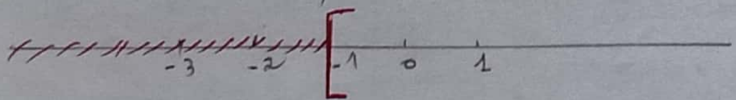


Cas ② : Si $a<0$ alors les solutions de l'inéquation $ax+b<0$ sont $x > \frac{-b}{a}$. On change le symbole

L'inéquation $2x-6 > 7x-1$ est respectivement équivalente à

$$2x-7x > -1+6$$
$$-5x > 5$$
$$x < \frac{5}{-5}$$
$$x < -1$$

Donc tous les nombres réels inférieurs strictement à -1 sont solutions de cette inéquation.



Cas ③ : Inéquations n'addmettant pas de solutions

L'inéquation $\frac{2x-5}{3} - \frac{x+1}{2} \geqslant \frac{x}{6}$ est respectivement équivalente à

$$\frac{2(2x-5)-3(x+1)}{6} \geqslant \frac{x}{6}$$
$$4x-10-3x-3 \geqslant x$$
$$4x-3x-x \geqslant 10+3$$
$$0 \geqslant 13$$

ce qui est impossible. Donc cette inéquation n'admet pas de solutions

Cas ④ : Inéquations addmettant une infinité de solutions

L'inéquation $5(2x-1)-7x < 3(x+1)$ est respectivement équivalente à

$$10x-5-7x < 3x+3$$
$$10x-7x-3x < 3+5$$
$$0x < 8$$

Ce qui est toujours vrai. Donc tous les nombres réels sont solutions de cette inéquation.

Problèmes attachés aux inéquations

Pour résondre un problème attaché à une inéquation, on suit les étapes suivantes :

1) Choix d'inconnue
2) Mise en inéquation : transformation des donnees en inéquation
3) Résolution de l'inéquation.
4) Retour au problème : Réponse au questions.

* Remarques

Lorsqu'on emploie au problème des expressions comme : au moins, au plus, moins que, plus que, meilleur que, maximal, minimal ... ; alors on travaille avec les inéquations.