Chapitre ③ : Les équations

I- Equation du premier degré à une inconnue:

1°) Définition :

a, b deux nombres rationnels
Toute égalité de la forme $ax+b=0$ est appelée équation du premier degré à une inconnue x.

2°/ Résolution de l'équation $ax+b=0$

* Régle : Résolution de $ax+b=0$

1°/ Si $a \neq 0$ alors $\frac{-b}{a}$ est la solution de cet équation.

2°) Si $a=0$ et $b \neq 0$, alors cet équation n'admet pas de solution.

3°) Si $a=0$ et $b=0$, alors tout nombre rationnel est solution de cet équation.

Remarque: Résoudre une équation; c'est trouver la valeur de l'inconnue x qui vérifie cette équation.

Technique générale:

* Pour résoudre une équation, on regroupe les termes qui contienent l'inconnue x dans un coté, et les termes connus dans l'autre côté à condition de changer le signe du terme déplacé.

* La multiplication se transforme en division et la division se transforme en multiplication sans changer le signe.

3) Exemples:

1°) L'équation $2x+7=x-1$ est respectivement équivalente à

$$2x-x=-1-7$$
$$x=-8$$

donc cet équation admet une seule solution -8

2°) L'équation $3x-11=3x-5$ est respectivement équivalente à

$$3x-3x=-5+11$$
$$0x=6$$

ce qui est impossible

donc cet équation n'a pas de solution.

3°/ L'équation $2x+8=2(x+4)$ est respectivement équivalente à

$$2x+8=2x+8$$
$$2x-2x=8-8$$
$$0x=0$$

ce qui est vrai

Donc tous les nombres rationnels sont solutions de cet équation

4°/ L'équation $5x+6=6$ est respectivement équivalente à

$$5x=6-6$$
$$5x=0$$
$$x=0$$

Donc cet équation admet une seul solution 0

4°/ Techniques et cas de résolution:

Cas ① : Développement

* Technique: pour résoudre ce genre d'équation, on enlève les parenthèses en utilisant la régle du développement

ou bien en supprimant les parenthèses précédés par + ou −

* Exemple: L'équation $2(3x+5)-3x=12-(2-4x)$ est respectivement équivalente à

$$6x+10-3x=12-2+4x$$
$$6x-3x-4x=12-2-10$$
$$-x=-8$$
$$x=8$$

Cet équation admet une seul solution 8.

Cas ②: Equation avec fraction

Technique: On reduit au même dénominateur dans les deux côtés de l'équation ou par la règle de produit des deux côtés est égale au produit des deux milieux.

* Exemple: L'équation $\frac{3x-1}{2}-1=\frac{x+2}{3}$ est respectivement équivalente à

$$\frac{3(3x-1)-6}{6}=\frac{2(x+2)}{6}$$
$$9x-3-6=2x+4$$
$$9x-2x=4+3+6$$
$$7x=13$$
$$x=\frac{13}{7}$$

Cet équation admet une seul solution $\frac{13}{7}$

Cas ③: produit nul
Equation sous forme $(ax+b)(cx+d)=0$

* Règle: Les solutions de l'équation $(ax+b)(cx+d)=0$ sont les solutions des deux équations $ax+b=0$ ou $cx+d=0$

* Remarques: * On obtient deux solutions ou plus selon le nombre des facteurs
* $(ax+b)^2=0$ est équivalente à $ax+b=0$

* Exemple:
L'équation $(3x-5)(6x+4)=0$ est respectivement équivalente à

$$3x-5=0 \quad \text{ou} \quad 6x+4=0$$
$$3x=5 \quad \text{ou} \quad 6x=-4$$
$$x=\frac{5}{3} \quad \text{ou} \quad x=\frac{-4}{6}=\frac{-2}{3}$$

Cet équation admet deux solutions $-\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{3}$

Cas ④: Equations et factorisation

Technique: Pour résoudre une équation du second degré ou plus, on factorise par le facteur commun ou par les identités remarquables pour l'écrire sous forme de produit nul, puis on applique la règle précédente.

* Exemple:
L'équation $3(x+2)-x(x+2)=0$ est respectivement équivalente à

$$(x+2)(3-x)=0$$
$$x+2=0 \quad \text{ou} \quad 3-x=0$$
$$x=-2 \quad \text{ou} \quad x=3$$

Cet équation admet deux solutions −2 et 3

Remarque:
Parfois on aura besoin de double factorisation, cela dans le cas où le facteur commun n'apparait pas au premier coup d'oeil.

* Exemples:
1) L'équation $(x-1)(x+3)+x^2-1=0$ est respectivement équivalente à

$$(x-1)(x+3)+(x-1)(x+1)=0$$

$(x-1)(x+3+x+1)=0$

$(x-1)(2x+4)=0$

$x-1=0$ ou $2x+4=0$

$x=1$ ou $2x=-4$

$x=1$ ou $x=\frac{-4}{2}=-2$

Cet équation admet deux solutions -2 et 1

2) L'équation $25x^2+30x+9=0$ est respectivement équivalente à

$(5x)^2+2\times 5x\times 3+3^2=0$

$(5x+3)^2=0$

$5x+3=0$

$5x=-3$

$x=\frac{-3}{5}$

Cet équation admet une seule solution $-\frac{3}{5}$

II _ Résolution des problèmes :

1°/ Règle : étapes de résolution du problème

Pour résoudre un problème, on suit les étapes suivantes :

1) Choix de l'inconnue : on le trouve à la question

2) Mise en équation : Transformation des donnés en équation.

3) Résolution de l'équation

4) Retour au problème : Vérification et réponse au question

2°) Exemple :

Saïd a acheté deux cahiers et trois stylos à 210DH. Sachant que le prix d'un cahier est le double du prix d'un stylo. Quel est le prix d'un cahier et le prix d'un stylo en DH ?

Solution :

1°) Le choix de l'inconnue

On considère x le prix d'un stylo

2) Mise en équation

Si x est le prix d'un stylo, alors le prix d'un cahier est $2x$

Donc le prix de trois stylos est $3x$ et le prix de deux cahiers est $4x$

Donc l'équation est $3x+4x=210$

3) Résolution de l'équation :

L'équation $3x+4x=210$ est respectivement équivalente à

$7x=210$

$x=\frac{210}{7}$

$x=30$

Cet équation admet une seule solution 30

4) Retour au problème :

On a $3\times 30+4\times 30=90+120=210$

donc la solution est juste

Alors le prix d'un stylo est 30DH et le prix d'un cahier est 60DH