Chapitre ⑦ : Introduction aux nombres réels

I _ La racine carrée d'un nombre rationnel positif :

1) Définition :

Si a est un nombre rationnel positif, alors il existe un nombre réel x tel que $x^2 = a$

Le nombre x s'appelle la racine carré du nombre a et on écrit $\boxed{x = \sqrt{a}}$

2) Exemples :

* $x^2 = 11$ signifie que $x = \sqrt{11}$
* $x^2 = \frac{1}{2}$ signifie que $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$
* $x^2 = \frac{17}{5}$ signifie que $x = \sqrt{\frac{17}{5}}$

*Remarques importants :

_ L'écriture $\sqrt{a}$ n'a pas de sens que si $a \geq 0$

C.à.d ce qui est à l'intérieur de la racine doit être positif.

_ Le nombre $\sqrt{7}$ se lit la racine carrée de 7, et n'est pas ni un nombre entier décimal, ni un nombre rationnel mais c'est un nombre réel.

3) Propriété principale :

a) Propo :

a nombre décimal positif $\boxed{\sqrt{a^2} = \sqrt{a}^2 = a}$

* Remarques :

_ Si a est un nombre rationnel positif

Alors les écritures $\sqrt{a^2}$ et $\sqrt{a}^2$ et $(\sqrt{a})^2$ sont égaux $\sqrt{a^2} = \sqrt{a}^2 = (\sqrt{a})^2 = a$

_ L'opposé du nombre $\sqrt{a}$ est $-\sqrt{a}$

Le signe "$-$" est à l'extérieur de la racine, pas à l'intérieur.

_ L'inverse du nombre $\sqrt{a}$ est $\frac{1}{\sqrt{a}}$

b) Exemples à apprendre :

Tableau de quelques carrés parfaits :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

* Exemples à apprendre :

* $\sqrt{0} = \sqrt{0^2} = 0$
* $\sqrt{1} = \sqrt{1^2} = 1$
* $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$
* $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$
* $\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$
* $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$
* $\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$
* $\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$
* $\sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8$
* $\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$
* $\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$
* $\sqrt{121} = \sqrt{11^2} = 11$
* $\sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$
* $\sqrt{169} = \sqrt{13^2} = 13$
* $\sqrt{196} = \sqrt{14^2} = 14$
* $\sqrt{225} = \sqrt{15^2} = 15$
* $\sqrt{256} = \sqrt{16^2} = 16$

* Remarque :

La racine carré est supprimé si le nombre est un carré parfait, sinon elle reste.

II _ Applications :

1) Théorème de Pythagore :

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 cm et BC = 5 cm, Calculons AC

* On a ABC est un triangle rectangle en A, donc d'après le théorème de Pythagore direct, on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$5^2 = 4^2 + AC^2$

$25 = 16 + AC^2$

$AC^2 = 25 - 16$

$AC^2 = 9$

$AC = \sqrt{9}$

Alors $\boxed{AC = 3\text{ cm}}$

* **Remarque :** Si on a trouvé par exemple $BC = \sqrt{5}$

On aura besoin de la calculatrice pour déterminer la valeur approchée de $\sqrt{5}$

donc $BC \simeq 2{,}23$ cm

2) Résolution de l'équation $x^2 = a$ ($a \geq 0$)

* L'équation $x^2 = 3$ est équivalente à

$x^2 - 3 = 0$

$x^2 - \sqrt{3}^2 = 0$

$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$

$x - \sqrt{3} = 0$ ou $x + \sqrt{3} = 0$

$x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

donc l'équation admet deux solutions $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$

* L'équation $x^2 = 49$ est équivalente à

$x^2 - 49 = 0$

$x^2 - 7^2 = 0$

$(x - 7)(x + 7) = 0$

$x - 7 = 0$ ou $x + 7 = 0$

$x = 7$ ou $x = -7$

Donc l'équation admet deux solutions 7 et -7

* **Remarques :**

- Si $a \geq 0$ alors les solutions de l'équation $x^2 = a$ sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
- Si $a < 0$ alors l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solutions

L'équation $x^2 = -5$ n'a pas de solution car $-5 < 0$

3) Racine carré et opérations :

$A = \sqrt{25} + \sqrt{3^2}$

$= \sqrt{5^2} + \sqrt{3^2}$

$= 5 + 3$

$\boxed{A = 8}$

$B = \sqrt{\frac{81}{4}} - \sqrt{\frac{16}{4}}$

$= \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2} - \sqrt{4}$

$= \frac{9}{2} - \sqrt{2^2}$

$= \frac{9}{2} - 2$

$\boxed{B = \frac{5}{2}}$

$C = \dfrac{\frac{\sqrt{121}}{7}}{\sqrt{9}} \times \sqrt{8}^2$

$= \dfrac{\frac{\sqrt{11^2}}{7}}{\sqrt{3^2}} \times \sqrt{8}^2$

$= \dfrac{11}{\frac{7}{3}} \times 8 = 11 \times \frac{3}{7} \times 8$

$\boxed{C = \frac{264}{7}}$