

III – Racines carrées

1. Définitions



Définition

La **racine carrée** d'un nombre positif a est le nombre positif noté \sqrt{a} dont le carré est égal à a .

Exemple : $\sqrt{16} = 4$ car $4^2 = 16$.



Remarque

La racine carrée d'un négatif ne sera pas vue au collège. La calculatrice affiche même une erreur en cas de calcul d'une racine carrée d'un nombre négatif!



Propriété

a est un nombre positif. Alors $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

Exemples :

$$\begin{array}{lll} \sqrt{3^2} = 3 & \sqrt{2,4^2} = 2,4 & \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \\ (\sqrt{7})^2 = 7 & (\sqrt{3,8})^2 = 3,8 & \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 = \frac{3}{5} \end{array}$$

■ **EXERCICE :** Développer les expressions $(3 + \sqrt{2})^2$; $(2\sqrt{5} - 4)^2$ et $(6\sqrt{2} + \sqrt{7})(6\sqrt{2} - \sqrt{7})$.

Solution : On applique dans l'ordre les identités remarquables 1, 2 puis 3 :

$$\begin{aligned} (3 + \sqrt{2})^2 &= 3^2 + 2 \times 3 \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\ &= 9 + 6\sqrt{2} + 2 \\ &= 11 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2\sqrt{5} - 4)^2 &= (2\sqrt{5})^2 - 2 \times \sqrt{5} \times 4 + 4^2 \\ &= 4 \times 5 - 8\sqrt{5} + 16 \\ &= 36 - 8\sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6\sqrt{2} + \sqrt{7})(6\sqrt{2} - \sqrt{7}) &= (6\sqrt{2})^2 - (\sqrt{7})^2 \\ &= 6^2 \times (\sqrt{2})^2 - 7 \\ &= 36 \times 2 - 7 \\ &= 72 - 7 \\ &= 65. \end{aligned}$$

2. Opérations sur les racines carrées



Propriété

a et b sont des nombres positifs non nuls.

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemples :

- $\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{12 \times 3} = \sqrt{36} = 6$
- $\sqrt{5} \times \sqrt{4} = \sqrt{5 \times 4} = \sqrt{20}$
- $\sqrt{14} = \sqrt{7 \times 2} = \sqrt{7} \times \sqrt{2}$
- $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{60}{15}} = \sqrt{4} = 2$
- $\sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \frac{7}{9}$
- $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$

3. Simplifications



Méthode (ÉCRIRE UNE RACINE CARRÉE SOUS LA FORME $a\sqrt{b}$)

Pour écrire $\sqrt{50}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b des nombres entiers et b le plus petit possible, on procède de la manière suivante :

1. On décompose le nombre sous la racine carrée en un produit/quotient dont l'un des nombres est un carré parfait (par exemple, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... ; ici $50 = 25 \times 2$).
2. On utilise les formules sur les racines carrées pour séparer la racine en deux.
3. On simplifie la racine carrée du nombre carré!

Par exemple :
$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

Exemple : Écrire $\sqrt{63}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b des nombres entiers et b le plus petit possible.

Réponse :

$$\sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = \sqrt{9} \times \sqrt{7} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}.$$



Remarque

On ne peut pas calculer des nombres avec des racines carrées différentes (par exemple $3\sqrt{2} + 5\sqrt{7} \neq 8\sqrt{9}$!) De temps en temps, il faudra donc décomposer chaque racine carrée afin de faire apparaître le même carré parfait.

Exemple : Écrire $A = 2\sqrt{24} + 3\sqrt{216} - 10\sqrt{6}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b des nombres entiers et b le plus petit possible.

Réponse :

$$\begin{aligned} A &= 2\sqrt{24} + 3\sqrt{216} - 10\sqrt{6} \\ &= 2\sqrt{4 \times 6} + 3\sqrt{36 \times 6} - 10\sqrt{6} \\ &= 2 \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{6} + 3 \times \sqrt{6^2} \times \sqrt{6} - 10\sqrt{6} \\ &= 2 \times 2\sqrt{6} + 3 \times 6\sqrt{6} - 10\sqrt{6} \\ &= 4\sqrt{6} + 18\sqrt{6} - 10\sqrt{6} \\ &= 12\sqrt{6} \end{aligned}$$