Chapitre ③ : La symétrie axiale

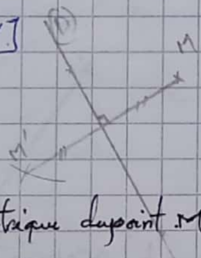
I - Le symétrique d'un point par rapport à une droite :

1) Exemple :

Soit (D) une droite et M un point à l'extérieur de (D)

$M \notin (D)$

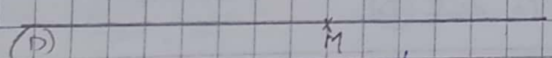
Traçons le point M' tel que la droite (D) est médiatrice du segment [MM']



Le point M' est appelé le symétrique du point M par rapport à la droite (D). La droite (D) est appelée : Axe de symétrie

* Cas particulier :

(D) est une droite et M un point de (D)



On remarque le symétrique de M par rapport à (D) est le point M lui même

On dit que le symétrique d'un point appartenant à une droite par rapport à cette droite est ce point lui même.

2) Définition :

Dire que le symétrique d'un point M par rapport à une droite (D) est :

- Le point M' tel que : (D) est la médiatrice du segment [MM'] si $M \notin (D)$
- Le point M lui même si $M \in (D)$

Remarques importantes :

- Si le point M' est le symétrique d'un point M par rapport à une droite (D), alors M est aussi le symétrique de M' par rapport à (D)

On dit que les points M et M' sont symétriques par rapport à (D)

- Le symétrique de tout point d'une droite est lui même

3) Exercice d'application :

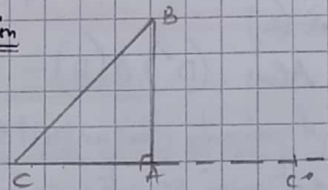
ABC est un triangle rectangle en A. C' est le symétrique de C par rapport au point A

1°/ Tracer la figure

2°/ montrer que C' est le symétrique de C par rapport à la droite (AB)

* Solution

1°/



2°/ On a C' est le symétrique de C par rapport au point A donc A est le milieu de [CC'] ①

On a ABC est un triangle rectangle en A donc $(AB) \perp (AC)$ càd $(AB) \perp (CC')$ ②

de ① et ② on déduit que (AB) est la médiatrice du segment [CC']

d'où C' est le symétrique C par rapport à (AB)

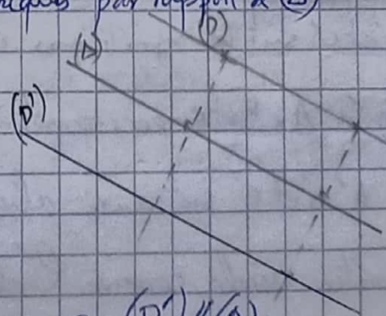
II - Le symétrique d'une droite

1) Exemple

* Cas ① : (D) et (Δ) deux droite parallèles $(D) // (\Delta)$

Construisons la droite (D') le symétrique de (D) par rapport à (Δ)

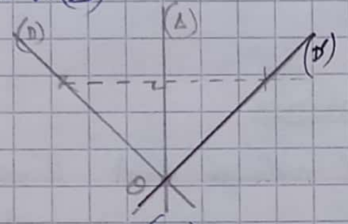
Pour cela on va choisir deux points (sans les nommer) sur (D), puis on va tracer leurs symétriques par rapport à (Δ)



On remarque que $(D') // (\Delta)$

* Cas ②: (D) et (Δ) deux droites sécantes en un point O

Construisons la droite (D') le symétrique de (D) par rapport à (Δ)



On remarque que (D') coupe aussi (Δ) en O

2) Propriété ①:

Soit (D) et (Δ) deux droites et (D') le symétrique de (D) par rapport à (Δ) :

1) Si (D) // (Δ) Alors (D') // (D)

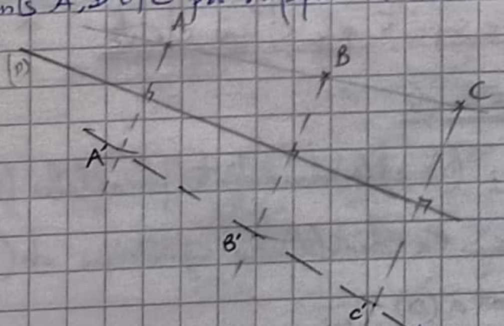
2) Si (D) et (Δ) sont sécantes en un point O, alors (D') et (D) sont aussi sécantes au même point O.

3) Conservation d'alignements des points:

a) Exemple:

Soit (D) une droite et A, B et C sont trois points alignés n'appartenant pas à (D)

A', B' et C' sont les symétriques respectifs des points A, B et C par rapport à la droite (D)



On remarque que les points A', B' et C' sont aussi alignés.

b) propriété ②:

Si les points A', B' et C' sont les symétriques respectifs des points alignés A, B et C par rapport à une droite, alors A', B' et C' sont aussi alignés

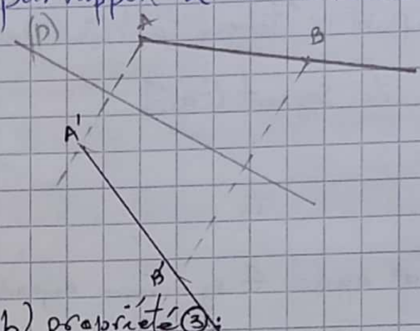
On dit que la symétrie axiale conserve l'alignement des points.

4) Le symétrique d'une demi droite:

a) Exemples

(D) est une droite et [AB) est une demi droite telque $A \notin (D)$ et $B \notin (D)$

Construisons la demi droite [A'B') le symétrique de [AB) par rapport à la droite (D).



b) propriété ③:

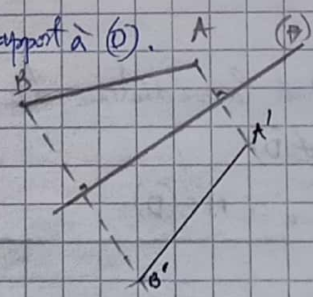
Le symétrique de la demi droite [AB) par rapport à la droite (D) est la demi droite [A'B') telque A' et B' sont les symétriques respectifs de A et B par rapport à la droite (D).

III – Le symétrique d'un segment:

1) Exemple:

Soit (D) une droite et [AB] un segment

Construisons le segment [A'B'] le symétrique de [AB] par rapport à (D). Pour cela on va construire A' et B' les symétriques respectifs de A et B par rapport à (D).



On remarque que : AB = A'B'

2) propriété ④:

Le symétrique d'un segment par rapport à une droite (D) est un segment de même longueur

On dit que la symétrie axiale conserve la distance.

3) Exercice d'application :

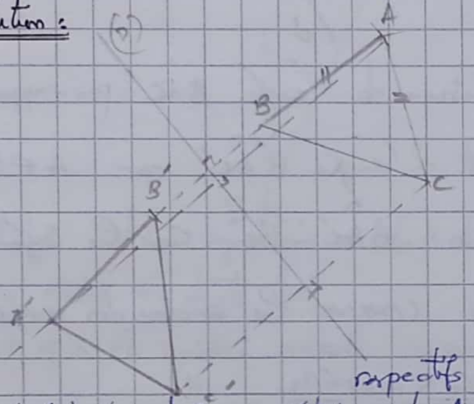
ABC est un triangle isocèle en A, (D) est une droite. A', B' et C' sont les symétriques respectifs des points A, B et C par rapport à (D)

1) Construire la figure

2) Montrer que A'B'C' est un triangle isocèle

Solution :

1)



2) On a A', B' et C' sont les symétriques respectifs de A, B et C par rapport à (D)

et on a la symétrie axiale conserve la distance

donc $\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \end{cases}$

or AB = AC car ABC est un triangle isocèle en A. donc $A'B' = A'C'$

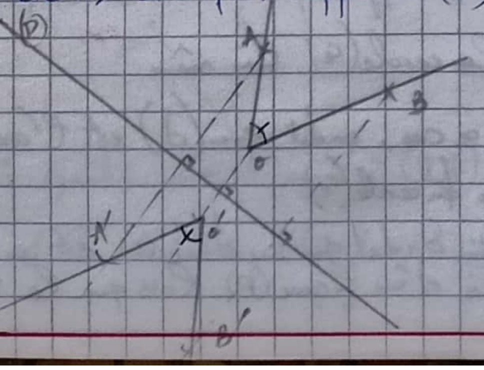
d'où le triangle A'B'C' est isocèle en A'

IV - Le symétrique d'un angle :

1) Exemple :

Soit (D) une droite et $\hat{AOB}$ un angle.

Construisons l'angle $\hat{A'O'B'}$ le symétrique de $\hat{AOB}$ par rapport à (D). Pour cela, on va construire A', O' et B' les symétriques respectifs de A, O et B par rapport à (D).



2) Propriété ⑤ :

Le symétrique d'un angle par rapport à une droite est un angle de même mesure.

Autrement dit, si A', O' et B' sont les symétriques respectifs de A, O et B par rapport à (D) Alors ; $\boxed{\hat{A'O'B'} = \hat{AOB}}$

On dit que la symétrie axiale conserve les mesures des angles.

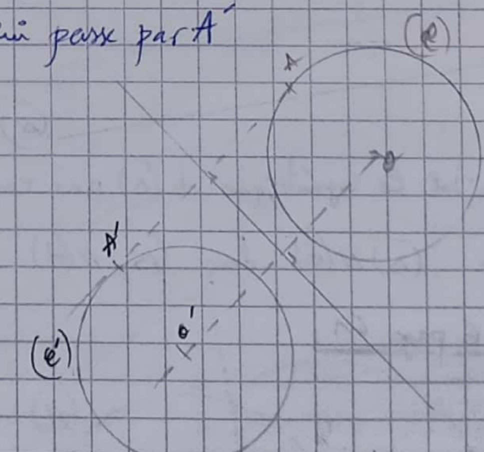
V - Le symétrique d'un cercle :

1) Exemple :

Soit (D) une droite et (C) un cercle de centre O et de rayon r. et A un point du cercle (C)

Construisons le cercle (C') le symétrique de (C) par rapport à (D). Pour cela on va construire O' et A' les symétriques de O et A respectifs par rapport à (D)

Le cercle (C') est le cercle de centre O' et qui passe par A'



On a AO = A'O' car la symétrie axiale conserve les distances

donc les deux cercles (C) et (C') ont même rayon

2) Propriété ⑥ :

Le symétrique d'un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon R par rapport à une droite (D) est un cercle $(\mathscr{C}')$ de même rayon R et dont le centre O' est le symétrique de O par rapport à (D)