Chapitre ②: Triangle rectangle et cercle

I- milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle :

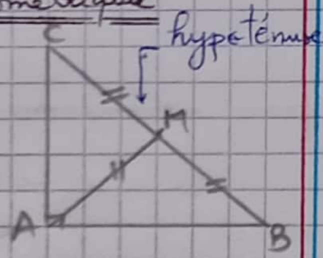
1) Propriété directe

a) Propo ①:

Si un triangle est rectangle, alors le milieu de son hypoténuse est équidistant aux sommets de ce triangle.
D'une autre façon : Si ABC est un triangle rectangle en A et M milieu de [BC], alors : MA = MB = MC

b) figure géométrique

ABC triangle rectangle en A, M milieu de l'hypoténuse [BC]
donc MA = MB = MC



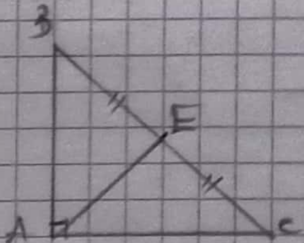
c) Exercice d'application:

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que BC = 8cm et E le milieu de [BC]

1°/ Tracer la figure
2°/ Montrer que AEC est triangle isocèle
3°/ Déduire la longueur EA

Solution:

1°/



2°/ On a le triangle ABC est rectangle en A et E est le milieu de son hypoténuse [BC]
donc d'après la propo①, on a :
EA = EB = EC
Donc EA = EC
D'où : AEC est un triangle isocèle en A

3°/ On sait que E est le milieu de [BC]
donc $EC = \frac{BC}{2}$
càd $EC = \frac{8}{2} = 4cm$
et EA = EC donc $\boxed{EA = 4cm}$

2) Propriété réciproque:

a) Propo ②:

Si dans un triangle le milieu de l'un de ses côtés est équidistants à ses sommets, alors ce triangle est rectangle au sommet opposé à ce côté
D'une autre façon: Si ABC est un triangle et M milieu de [BC] tel que: MA = MB = MC, alors ABC est un triangle rectangle en A.

b) Exercice d'application:

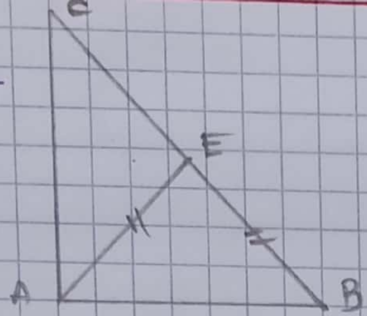
Soit AEB un triangle isocèle en E et soit C le symétrique de A par rapport à E

1°/ Tracer la figure
2°) Montrer que le triangle ABC est rectangle.

Rédigé par: Mr BENNASSER Jamal

* Solution :

1°/



2°/ On a le triangle AEB est un triangle isocèle en E, alors $EA = EB$ ①

et on a C est le symétrique de B par rapport au point E

donc E est milieu du côté [AC]

alors : $EA = EC$ ②

de ① et ②, on déduit que $EA = EB = EC$

Dans le triangle ABC : on a $\begin{cases} E \text{ milieu de } [AC] \\ EA = EB = EC \end{cases}$

donc d'après la propo ②, le triangle ABC est rectangle en B.

II – Triangle rectangle et cercle :

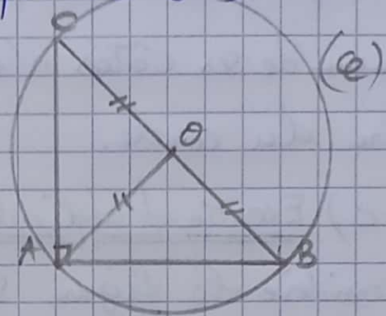
1°/ Propriété directe :

a) Propo ③ :

> Si un triangle est rectangle, alors le milieu de son hypoténuse est le centre de son cercle circonscrit de rayon la moitié de l'hypoténuse.
>
> D'une autre façon : Si ABC est un triangle rectangle en A et O milieu de son hypoténuse [BC], alors O est le centre du cercle circonscrit à ce triangle de rayon $\frac{BC}{2}$

b_ figure géométrique :

ABC triangle rectangle en A et O milieu de l'hypoténuse [BC]



Le cercle (C) circonscrit au triangle AB est de centre O et de rayon $\frac{BC}{2}$

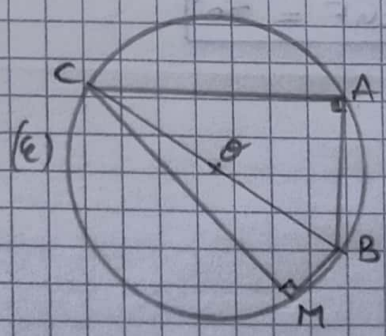
2°/ Propriété réciproque

a) Propo ④ :

> Si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés, alors ce triangle est rectangle au sommet opposé à ce côté
>
> D'une autre façon : Si ABC est un triangle inscrit dans un cercle de diamètre [BC], alors ce triangle est rectangle en A.

b) figure géométrique :

(C) cercle de centre O

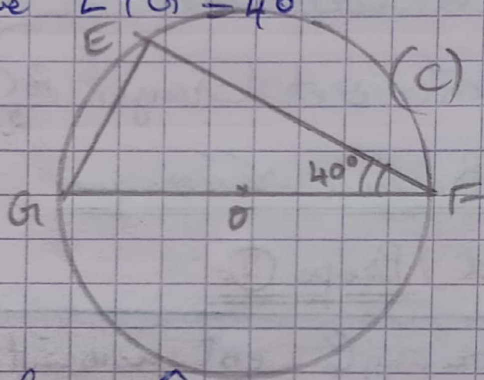


* Le triangle ABC est rectangle en A car [BC] est un diamètre du cercle (C)

* Le triangle BCM est rectangle en M car [BC] est un diamètre du cercle (C)
* Le triangle AMC n'est pas rectangle car aucun de ses côtés n'est pas diamètre du cercle.

c) Exercice d'application:

On considère la figure suivante telle que $E\hat{F}G = 40°$



Calculer $E\hat{G}F$

* Solution: On a le triangle EFG est inscrit dans le cercle (C) de diamètre le côté [GF]

donc d'après la propo (1) le triangle EFG est rectangle en E

d'où $E\hat{G}F + E\hat{F}G = 90°$

$E\hat{G}F + 40° = 90°$

$E\hat{G}F = 90° - 40°$

Donc $\boxed{E\hat{G}F = 50°}$