استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,0 ن)

نعتبر في $(\mathbb{N}^*)^2$ المعادلة (E) الآتية : $\boxed{(E) \;:\; x^2(x^2+7) = y(2x+y)}$

ليكن (x,y) عنصرا من $(\mathbb{N}^*)^2$ و ليكن δ القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y

نضع : $x = \delta a$ و $y = \delta b$

1. نفترض أن (x,y) حل للمعادلة (E) .

0,50 ن	أ) تحقق أن : $a^2(\delta^2 a^2 + 7) = b(2a+b)$
0,50 ن	ب) إستنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث : $\delta^2 a^2 + 7 = kb$ و $2a + b = ka^2$
0,50 ن	ج) بين أن : $a = 1$
0,75 ن	د) إستنتج أن : $(b+1)^2 = \delta^2 + 8$
0,75 ن	2) حل في $(\mathbb{N}^*)^2$ المعادلة (E) .

التمرين الثاني : (3,5 ن)

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر المنحنى (E) الذي معادلته : $y = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$

0,50 ن	1) أ) بين أن (E) جزء من إهليلج يتم تحديده.
0,50 ن	ب) أرسم المنحنى (E) .
0,75 ن	2) لتكن A و B النقطتين اللتين زوجا إحداثيتيهما على التوالي هما : $(4;0)$ و $(0;3)$

نعتبر النقطة M_1 من (E) التي أفصولها x_1 حيث x_1 ينتمي إلى المجال $[0;4]$.

نضع : $x_1 = 4\cos(t_1)$ حيث : $0 \le t_1 \le \frac{\pi}{2}$ و نعتبر التكامل الآتي : $I(x_1) = \frac{3}{4}\int_{x_1}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$

1,00 ن	أ) باستعمال المكاملة بتغيير المتغير و ذلك بوضع $x = 4\cos(t)$ حيث : $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ بين أن : $I(x_1) = 6t_1 - 3\sin(2t_1)$
0,75 ن	ب) لتكن $S(x_1)$ مساحة السطح المحصور بين المستقيمين (OA) و (OM_1) و المنحنى (E) .

و لتكن S مساحة السطح المحصور بين المستقيمين (OA) و (OB) و المنحنى (E)

0,25 ن — ب) تحقق أن أرتوب النقطة M_1 هو $3\sin(t_1)$

0,25 ن — ج) أحسب $S(x_1)$ بدلالة t_1 .

0,25 ن — د) إستنتج قيمة S .

0,25 ن — و) بين أن : $t_1 = \frac{\pi}{4} \iff S(x_1) = \frac{1}{2}S$

0,25 ن — هـ) حدد إحداثيتي M_1 في المعلم $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ في حالة : $t_1 = \frac{\pi}{4}$

التمرين الثالث : (4,5 ن)

الجزء الأول لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ نعتبر المصفوفة : $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

لتكن E مجموعة المصفوفات الآتية : $\boxed{E = \{M_{(a,b)} \ / \ (a,b)\epsilon\mathbb{R}^2\}}$

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية.

0,75 ن — ① بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$ و من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

0,25 ن — ② بين أن : $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

0,50 ن — ③ أ) بين أن لكل عددين حقيقيين x و y لدينا : $(x = y = 0) \iff (x^2+xy+y^2 = 0)$

0,25 ن — ب) حدد العناصر التي تقبل مقلوبا في الحلقة $(E,+,\times)$

0,50 ن — ج) إستنتج أن : $(E,+,\times)$ جسم تبادلي .

الجزء الثاني ليكن σ عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$.

0,25 ن — ① بين أن $(1,\sigma)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,\cdot)$

0,75 ن — ② نعتبر التطبيق ψ المعرف من E نحو $\mathbb{C}$ بما يلي :

$$\begin{array}{rccl} \psi : & E & \to & \mathbb{C} \\ & M_{(a,b)} & \to & a+\sigma b \end{array}$$

بين أن ψ تشاكل تقابلي من $(E,+)$ نحو $(\mathbb{C},+)$

0,75 ن — ③ نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - z + 1 = 0$

حل في مجموعة الأعداد العقدية هذه المعادلة و اكتب حليها على الشكل المثلثي

0,50 ن — ④ نفترض في هذا السؤال أن : $\sigma = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

بين أن ψ تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

التمرين الرابع : (9,0 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\frac{4\ln x}{x^2}-\frac{1}{2}$

(I) و ليكن $(\mathscr{C})$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ وحدته : $\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=2\ cm$

0,50 ن ① أحسب : $\lim_{x\to0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathscr{C})$

0,25 ن ② أ) بين أن : $\forall\ x\ \epsilon\ ]0;+\infty[\ \ ;\ \ f'(x)=4\left(\frac{1-2\ln x}{x^3}\right)$

0,75 ن ب) إعط جدول تغيرات الدالة f .

0,75 ن ③ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين α و β بحيث : $1<\alpha<\sqrt{e}<\beta<3$

0,50 ن ④ حدد معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة التي أفصولها 1

0,75 ن ⑤ أرسم $(\mathscr{C})$

0,25 ن (II) ① بين أن : $\forall\ t\ \epsilon\ [0;+\infty[\ \ ;\ \ 1-t\le\frac{1}{1+t}\le 1$

0,50 ن ② استنتج أن : $\forall\ a\ \epsilon\ [0;+\infty[\ \ ;\ \ a-\frac{a^2}{2}\le\ln(1+a)\le a$

(III) لكل عدد صحيح n بحيث $n\ge4$ نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=\frac{n\ ln\ x}{x^2}-\frac{1}{2}$

و ليكن $(\mathscr{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم .

0,50 ن ① أدرس تغيرات الدالة f_n .

0,50 ن ② أدرس تقعر المنحنى $(\mathscr{C}_n)$ و بين أنه يقبل نقطة انعطاف أفصولها $e^{\frac{5}{6}}$

0,25 ن ③ أ) قارن $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ حسب قيم x .

0,25 ن ب) استنتج الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_n)$ و $(\mathscr{C}_{n+1})$.

0,50 ن ④ بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين u_n و v_n بحيث : $1<u_n<\sqrt{e}<v_n$

0,50 ن ⑤ بين أن $(u_n)_{n\ge4}$ متتالية تناقصية قطعا مستعملا نتيجة السؤال ③

0,25 ن ⑥ أ) باستعمال $②(II)$ بين أن : $(\forall n\ge4)\ ;\ \ \frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2}\le\ln(u_n)\le u_n-1$

0,25 ن ب) استنتج أن : $(\forall n\ge4)\ ;\ \ \frac{(u_n)^2}{2n}\le u_n-1\le\frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)}$

0,25 ن ج) بين أن : $(\forall n\ge4)\ ;\ \ \frac{1}{2n}\le u_n-1\le\frac{e}{n}$

0,50 ن د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge4}$ متقاربة محددا نهايتها

0,50 ن ⑦ أ) بين أن : $(\forall n\ge4)\ ;\ \ e^{\frac{5}{6}}<v_n$

0,50 ن ب) استنتج أن : $\lim_{n\infty} v_n=+\infty$