



استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,0 ن)

نعتبر في \mathbb{Z} النظمة (S) التالية : $\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$ بحيث : $\begin{cases} a, b, p, q \in \mathbb{Z} \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$

① 0,50 ن (أ) بين أنه يوجد زوج (u_0, v_0) من \mathbb{Z}^2 بحيث : $pu_0 + qv_0 = 1$.

0,50 ن (ب) بين أن $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ حل للنظمة (S).

0,50 ن (2) ليكن x حلا للنظمة (S)، بين أن العدد pq يقسم العدد $x - x_0$.

0,50 ن (3) ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث : pq يقسم العدد $x - x_0$. بين أن x حل للنظمة (S).

0,50 ن (4) استنتج مجموعة حلول النظمة (S).

0,50 ن (5) حل في \mathbb{Z} النظمة التالية : $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$

التمرين الثاني : (2,0 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا أكبر أو يساوي 3. تتوفر على n صندوقا مرقما من 1 إلى n . الصندوق رقم k بحيث : $(1 \leq k \leq n)$ يحتوي على k كرة بيضاء و $(n - k)$ كرة سوداء.

نختار عشوائيا صندوقا من بين الصندوقين ثم نسحب منه كرة واحدة.

0,50 ن (1) أحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء.

0,75 ن (2) أحسب احتمال أن يتم السحب من صندوق رقمه فردي.

0,75 ن (3) أحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء، علما أن السحب تم من صندوق رقمه عدد فردي.

التمرين الثالث : (2,0 ن)

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) .

نعتبر المجموعة : $(\mathcal{H}) = \{M(z) \in (P) / z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 = 1\}$

0,25 ن (أ) حدد معادلة ديكراتية للمجموعة (\mathcal{H}) .

0,50 ن (ب) بين أن (\mathcal{H}) هذلول و حدد مركزه و رأسيه و مقاربيه في المعلم (O, \vec{u}, \vec{v}) .

0,25 ن (ج) أنشئ (\mathcal{H}) .

0,50 ن (2) $M(a)$ و $M(b)$ نقطتان من (\mathcal{H}) . نضع : $\varphi(a, b) = a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}$.

0,50 ن (أ) بين أن : $M(\varphi(a, b)) \in (\mathcal{H})$

0,50 ن (ب) تحقق أن $\varphi(a, 1) = 1$ و أن $\varphi(a, \bar{a}) = 1$.

1,00 ن (3) نزود (\mathcal{H}) بقانون التركيب الداخلي (*) حيث لكل $M(a)$ و $M(b)$ من (\mathcal{H}) : $M(a) * M(b) = M(\varphi(a, b))$.

بين أن : $((\mathcal{H}), *)$ زمرة تبادلية.

التمرين الرابع : (3,0 ن)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2. نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathcal{M}(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad \text{نعتبر المجموعة التالية :}$$

و هي مزودة بجمع المصفوفات (+) و ضرب مصفوفة في عدد حقيقي (\cdot) و ضرب المصفوفات (\times) .

$$\text{نضع : } I = \mathcal{M}(1, 0) \text{ و } J = \mathcal{M}(0, 1) \text{ و } O = \mathcal{M}(0, 0)$$

① ① بين أن : $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

0,50 ن

② بين أن (I, J) أساس للفضاء المتجهي $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ و اعط بعده .

0,50 ن

③ ليكن α عددا عقديا لا ينتمي إلى \mathbb{R} ، بين أن الأسرة $(1, \alpha)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

0,50 ن

④ نعتبر التطبيق ψ من \mathbb{C} نحو \mathcal{F} المعرف بما يلي : $\psi(z) = \mathcal{M}(m, n)$.

بحيث : $z = m + \alpha n$ و $m \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{R}$ و $z \in \mathbb{C}$.

① تحقق أن $J^2 = -2(I + J)$ و $\psi(\alpha) = J$

0,50 ن

② حدد قيمتي α التي يكون من أجلها التطبيق ψ تشاكلا تقابليا من (\mathbb{C}, \times) نحو (\mathcal{F}, \times) .

0,50 ن

④ نأخذ : $\alpha = -1 + i$. أكتب في الأساس (I, J) المصفوفة J^{2007} .

0,50 ن

التمرين الخامس : (9,0 ن)

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $g(x) = 1 + x - e^{-x}$

① ① أدرس تغيرات الدالة g على \mathbb{R} .

0,50 ن

② أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة g .

0,50 ن

③ استنتج أن $x_0 = 0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$.

0,50 ن

② لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^* بما يلي : $f(x) = \frac{1}{1+x-e^{-x}}$

0,50 ن

④ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

① أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

0,50 ن

② أحسب $f'(x)$ لكل x من \mathbb{R}^* .

0,25 ن

③ ضع جدول تغيرات الدالة f .

0,50 ن

④ أنشئ (\mathcal{E}) .

0,50 ن

③ ① ليكن n من \mathbb{N}^* ، بين أن المعادلة $f(x) = n$ تقبل حلا وحيدا x_n في المجال $]0, +\infty[$.

0,50 ن

② بين أن المتتالية $(x_n)_{n \geq 1}$ تناقصية و أنها متقاربة .

0,50 ن

③ أثبت أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

0,50 ن

0,25 ن (II) ① (أ) بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تكافئ المعادلة $e^x = x$

0,50 ن (ب) بين أن المعادلة $e^x = x$ تقبل حلا وحيدا هو $\alpha = x_1$ بحيث $\frac{1}{e} \leq \alpha \leq 1$

② تعتبر المتتالية $(y_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي $y_1 = 1$ و $y_{n+1} = e^{-y_n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

0,50 ن (أ) بين أن لكل n من \mathbb{N}^* : $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$

0,50 ن (ب) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : |y_{n+1} - \alpha| \leq e^{-\frac{1}{e}} |y_n - \alpha|$

0,50 ن (ج) استنتج أن : $(y_n)_{n \geq 1}$ متقاربة محددًا نهايتها .

(III) لتكن الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}_+ بما يلي :

$$(\forall x > 0) : \mathcal{F}(x) = \int_x^{2x} f(t) dt \quad \text{و} \quad \mathcal{F}(0) = \frac{1}{2} \ln 2$$

0,25 ن ① (أ) بين أن : $(\forall t > 0) : \frac{1}{1+t} < f(t) < \frac{1}{t}$

0,50 ن (ب) استنتج النهاية التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(x)$

0,50 ن ② (أ) بين أن : $(\forall t \geq 0) : 1 - t \leq e^{-1} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$

0,50 ن (ب) بين أن لكل t من المجال $]0,4[$: $\frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right)$

0,25 ن (ج) استنتج أن \mathcal{F} متصلة على اليمين في 0

0,50 ن ③ (أ) بين أن \mathcal{F} قابلة للإشتقاق على \mathbb{R}_+^* و أحسب $\mathcal{F}'(x)$ من أجل $x > 0$.

0,25 ن (ب) أدرس تغيرات الدالة \mathcal{F} على \mathbb{R}_+ .