



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
-الدورة العادية 2008-
الموضوع

المعامل:	9	المادّة:	الرياضيات
مدة الإنجاز:	4س	الشعب(ة):	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)

التمرين الأول: (3,25 نقطة)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ حلقة واحدة و $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ جسم تبادلي.
نضع:

$$E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ و } J = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \text{ و } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) أ) بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ 0,75

ب) بين أن الأسرة (I, J) أساس في الفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$ 0,5

(2) نعتبر التطبيق: $f: \mathbb{C}^* \longrightarrow E^*$
 $a + ib \longrightarrow M(a, b)$
حيث: $E^* = E \setminus \{M(0, 0)\}$

أ) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$ 0,25

ب) بين أن f تشاكل تقابلي من (\mathbb{C}^*, \cdot) نحو (E^*, \cdot) 0,5

3) بين أن $(E, +, \cdot)$ جسم تبادلي. 0,5

4) حل في E المعادلة: $J \times X^3 = I$ (حيث $X^3 = X \times X \times X$) 0,75

التمرين الثاني: (3,75 نقطة)

ليكن a عددا عقديا غير منعدم و \bar{a} مرافق العدد a .

I- نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة: $(G) \quad iz^2 + (a + \bar{a} - i)z - \bar{a} - ia\bar{a} = 0$

(1) أ) تحقق أن مميز المعادلة (G) هو: $\Delta = (a - \bar{a} - i)^2$ 0,5

ب) حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة (G) . 0,5

(2) بين أن a حل للمعادلة (G) إذا و فقط إذا كان $\text{Re}(a) = \text{Im}(a)$ (حيث $\text{Re}(a)$ هو الجزء

الحقيقي للعدد العقدي a و $\text{Im}(a)$ هو جزءه التخيلي)

الصفحة
2 / 4

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
(الدورة العادية 2008)
الموضوع

C: NS24

المادة :	الرياضيات
----------	-----------

الشعب(ة):	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
-----------	--------------------------------

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نفترض أن $\text{Re}(a) \neq \text{Im}(a)$
نعتبر النقط A و B و C التي أحاقها على التوالي هي a و $i\bar{a}$ و $1+ia$

$$Z = \frac{(1+ia) - a}{(i\bar{a}) - a} \quad (1) \quad \text{نضع :}$$

$$\bar{Z} = \frac{(i-1)\bar{a} - i}{i\bar{a} - a} \quad (أ) \quad \text{تحقق أن :} \quad 0,5$$

$$\text{Im}(a) = \frac{1}{2} \quad (ب) \quad \text{بين أن النقط A و B و C مستقيمة إذا و فقط إذا كان} \quad 0,5$$

$$(2) \quad \text{نفترض في هذا السؤال أن} \quad \text{Im}(a) \neq \frac{1}{2}$$

نعتبر R_1 الدوران الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{2}$ و R_2 الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$

$$\text{نضع : } R_1(B) = B' \quad \text{و} \quad R_2(C) = C'$$

لتكن النقطة E منتصف القطعة [BC]

(أ) حدد b' و c' لحقي النقطتين B' و C' على التوالي . 0,5

(ب) بين أن المستقيمين (AE) و (B'C') متعامدان و أن $B'C' = 2AE$ 0,75

التمرين الثالث: (3 نقط)

I- نعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة التالية : $35u - 96v = 1$ (E)

(1) تحقق أن الزوج (11,4) حل خاص للمعادلة (E) 0,25

(2) استنتج مجموعة حلول المعادلة (E) 0,5

II- نعتبر في المجموعة \mathbb{N} المعادلة التالية: $x^{35} \equiv 2 \pmod{97}$ (F)

(1) ليكن x حلا للمعادلة (F)

(أ) بين أن العدد 97 أولي و أن x و 97 أوليان فيما بينهما . 0,5

(ب) بين أن : $x^{96} \equiv 1 \pmod{97}$ 0,5

(ج) بين أن : $x \equiv 2^{11} \pmod{97}$ 0,5

(2) بين أنه إذا كان العدد الصحيح الطبيعي x يحقق $x \equiv 2^{11} \pmod{97}$ فإن x حل للمعادلة (F) 0,25

(3) بين أن مجموعة حلول المعادلة (F) هي مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية التي تكتب على 0,5

الشكل $11+97k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

الصفحة
3 / 4

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
(الدورة العادية 2008)
الموضوع

C: NS24

المادة :	الرياضيات
----------	-----------

الشعب(ة):	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
-----------	--------------------------------

التمرين الرابع: (10 نقط)

I – لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R}_+ بما يلي : $f(x) = 2x - e^{-x^2}$ وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1) أ) احسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها. 0,5

ب) احسب $f'(x)$ لكل x من \mathbb{R}_+ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f 0,5

ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في \mathbb{R}_+ و أن $0 < \alpha < 1$ 0,5

د) ادرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0,1]$ 0,5

(2) أنشئ المنحنى (C) . (نأخذ : $\alpha \approx 0,4$) 0,5

II – نعتبر الدالتين العدديتين φ و g للمتغير الحقيقي x المعرفتين على \mathbb{R}_+ بما يلي :

$$g(x) = x^2 - \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{و} \quad \begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt ; x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

(1) أ) بين أن : $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^* \right) \left(\exists c \in]0, x[\right) : \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt = e^{-c^2}$ 0,5

ب) استنتج أن : $\int_0^1 e^{-t^2} dt < 1$ 0,5

(2) أ) بين أن : $g(\alpha) = \int_0^\alpha f(t) dt$ 0,5

ب) بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+ و أن : $g'(x) = f(x)$; $(\forall x \in \mathbb{R}_+)$ 0,5

ج) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $] \alpha, 1[$ 0,5

(3) أ) بين أن الدالة φ متصلة على اليمين في الصفر. 0,5

ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\varphi(x) = e^{-x^2} + \frac{2}{x} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$; $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ 0,5

ج) بين أن الدالة φ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* و أن : $\varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$; $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ 0,75

د) بين أن : $\varphi([0,1]) \subset]0,1[$ 0,5

(4) أ) بين أنه لكل عدد حقيقي x من \mathbb{R}_+ لدينا : $\int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leq \frac{x^3}{3}$ 0,5

الصفحة
4 / 4

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
(الدورة العادية 2008)
الموضوع

C: NS24

المادة :	الرياضيات
----------	-----------

الشعب(ة):	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
-----------	--------------------------------

(ب) بين أن : $(\forall x \in]0,1[); \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$	0,5
(ج) بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \varphi(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$	0,25
(5) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = \frac{2}{3}$ و $u_{n+1} = \varphi(u_n)$; $(\forall n \in \mathbb{N})$	
(أ) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n \leq 1$	0,5
(ب) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n - \beta \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$	0,5
(ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة و حدد نهايتها.	0,5