المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2014
الموضوع

NS 22

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها	المعامل	7

تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- عدد الصفحات: 3 (الصفحة الأولى تتضمن تعليمات ومكونات الموضوع والصفحتان المتبقيتان تتضمنان موضوع الامتحان) ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين ، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

مكونات الموضوع

- يتكون الموضوع من أربعة تمارين و مسألة مستقلة فيما بينها و تتوزع حسب المجالات كما يلي :

التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الثالث	المتتاليات العددية	3 نقط
التمرين الرابع	حساب الاحتمالات	3 نقط
المسألة	دراسة دالة وحساب التكامل	8 نقط

- بالنسبة للمسألة ، $\ln$ يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري

الموضوع

التمرين الأول : (3 ن)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، النقط $A(0,3,1)$ و $B(-1,3,0)$ و $C(0,5,0)$ و الفلكة (S) التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-4x-5=0$

0.75 — 1) أ- بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ واستنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية

0.5 — ب- بين أن $2x-y-2z+5=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

0.5 — 2) أ- بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(2,0,0)$ و أن شعاعها هو 3

0.75 — ب- بين أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S)

0.5 — ج- حدد مثلوث إحداثيات H نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S)

التمرين الثاني : (3 ن)

0.75 — 1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-z\sqrt{2}+2=0$

2) نعتبر العدد العقدي $u=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$

0.5 — أ- بين أن معيار العدد u هو $\sqrt{2}$ و أن $\arg u\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

0.75 — ب- باستعمال كتابة العدد u على الشكل المثلثي ، بين أن u^6 عدد حقيقي

3) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$، النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما a و b بحيث $a=4-4i\sqrt{3}$ و $b=8$

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$

0.5 — أ- عبر عن z' بدلالة z

0.5 — ب - تحقق من أن B هي صورة A بالدوران R و استنتج أن المثلث OAB متساوي الأضلاع

التمرين الثالث : (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=13$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+7$ لكل n من $I\!N$

0.75 — 1) بين بالترجع أن $u_n<14$ لكل n من $I\!N$

2) لتكن (v_n) المتتالية العددية بحيث : $v_n=14-u_n$ لكل n من $I\!N$

1 — أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم اكتب v_n بدلالة n

0.75 — ب- استنتج أن $u_n=14-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $I\!N$ ثم احسب نهاية المتتالية (u_n)

0.5 — ج- حدد أصغر قيمة للعدد الصحيح الطبيعي n التي يكون من أجلها $u_n>13{,}99$

التمرين الرابع : (3 ن)

يحتوي كيس على تسع بيدقات لا يمكن التمييز بينها باللمس وتحمل الأعداد : 0 و 0 و 0 و 0 و 0 و 1 و 1 و 1 و 1

1) نسحب عشوائيا و في آن واحد بيدقتين من الكيس 1

ليكن A الحدث : " مجموع العددين اللذين تحملاهما البيدقتين المسحوبتين يساوي 1 "

بين أن $p(A)=\dfrac{5}{9}$

2) نعتبر اللعبة التالية : يسحب سعيد عشوائيا و في آن واحد بيدقتين من الكيس و يعتبر فائزا إذا سحب بيدقتين تحمل كل واحدة منهما العدد 1

أ- بين أن احتمال فوز سعيد هو $\dfrac{1}{6}$ 1

ب- لعب سعيد اللعبة السابقة ثلاث مرات (يعيد سعيد البيدقتين المسحوبتين إلى الكيس في كل مرة) ما هو الاحتمال لكي يفوز سعيد مرتين بالضبط ؟ 1

المسألة : (8 ن)

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=1-\dfrac{1}{x^2}+\ln x$

1) بين أن $g'(x)=\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$ و استنتج أن الدالة g تزايدية على $]0,+\infty[$ 0.5

2) تحقق من أن $g(1)=0$ ثم استنتج أن $g(x)\le 0$ لكل x من $]0,1]$ و $g(x)\ge 0$ لكل x من $[1,+\infty[$ 0.75

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\left(1+\ln x\right)^2+\dfrac{1}{x^2}$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (الوحدة : $1\,cm$)

1) بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ و أول هندسيا النتيجة 0.5

2) أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 0.25

ب- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\ln x\right)^2}{x}=0$ (يمكنك وضع $t=\sqrt{x}$) ثم بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 1

ج- حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ 0.25

3) أ- بين أن $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$ ثم استنتج أن الدالة f تناقصية على $]0,1]$ و تزايدية على $[1,+\infty[$ 1.5

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$ ثم استنتج أن $f(x)\ge 2$ لكل x من $]0,+\infty[$ 1

4) أنشئ (C) في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة تحديدها غير مطلوب) 0.75

5) نعتبر التكاملين I و J التاليين : $I=\int_1^e\left(1+\ln x\right)dx$ و $J=\int_1^e\left(1+\ln x\right)^2dx$

أ- بين أن $H:x\mapsto x\ln x$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto 1+\ln x$ على $]0,+\infty[$ ثم استنتج أن $I=e$ 0.5

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $J=2e-1$ 0.5

ج- احسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ 0.5

تصحيح الإمتحان الوطني 2014

الرياضيـــــــــــــــــــات

عناصر الإجابة :

تمريـــن 1 : (3 نقط)

1) أ) لدينا : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ إذن :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & -1 & 0\\ \vec{j} & 0 & 2\\ \vec{k} & -1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}$$

$$=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$$

بما أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ فإن A و B و C نقط غير مستقيمية

ب) لدينا (ABC) هو المستوى المار من A والمتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية له .

إذن $M(x;y;z)\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y-3\\z-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}=0$$

$$2x-y-2z+5=0$$

(أو النقط A و B و C تحقق المعادلة $2x-y-2z+5=0$ إذن هي معادلة المستوى (ABC))

2) أ) لدينا : $x^2+y^2+z^2-4x-5=0\Leftrightarrow(x-2)^2+y^2+z^2=9=3^2$

إذن (S) هي الفلكة التي مركزها $\Omega(2;0;0)$ وشعاعها $R=3$

ب) لدينا : $d(\Omega,(ABC))=\frac{|2\times2-0-0+5|}{\sqrt{4+1+4}}=3$ إذن (ABC) مماس للفلكة (S)

ج) لدينا $H(a,b,c)$ المسقط العمودي لـ Ω على (ABC) إذن H هي تقاطع (ABC) والمستقيم المار من Ω و العمودي على (ABC)

إذن : $\exists t\in\mathbb{R}/a=2+2t\ ;b=-t\ ;c=-2t$ و $2a-b-2c+5=0\Leftrightarrow t=-1$

إذن $H(0;1;2)$

تمريـــــن 2 : (3نقاط)

1) لدينا : لأن: $z^2-\sqrt{2}z=\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

$$z^2-\sqrt{2}z+2=0 \Leftrightarrow \left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{3}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i \text{ أو } z=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$$

وبالتالي $S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i\right\}$

2) أ- لدينا : $u=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ومنه $|u|=\sqrt{2}\ ;\ \arg u\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

ب- لدينا : $u=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{3}\right]\Rightarrow u^6=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{3}\right]^6\Rightarrow u^6=\left[\left(\sqrt{2}\right)^6;\frac{6\pi}{3}\right]\Rightarrow u^6=[16;2\pi]\Rightarrow u^6=16$

ومنه $u^6\in\mathbb{R}$

3) أ- $M'(z')=R\left(O,\frac{\pi}{3}\right)(M(z))\Leftrightarrow z'-z_O=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-z_O)$

$$\Leftrightarrow z'=z\times\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

ب- لدينا : $z_A\times\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(4-4\sqrt{3}i\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$=\left(4\times\frac{1}{2}+4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(4\times\frac{\sqrt{3}}{2}-4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\right)$$

$$=8=z_B$$

ومنه $B=R\left(O,\frac{\pi}{3}\right)(A)$

لدينا: $B=R\left(O,\frac{\pi}{3}\right)(A)\Rightarrow\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=\left[1;\frac{\pi}{3}\right]$

إذن OAB مثلث متساوي الأضلاع .

تمريـــــن 3 : (3 نقاط)

1) من أجل n=0 لدينا : $U_0=13$ و $13<14$ إذن الخاصية تتحقق

ليكن n من $\mathbb{N}$ نفترض أن $U_n<14$ لنبين أن $U_{n+1}<14$

لدينا $U_n<14\Rightarrow\frac{1}{2}U_n+7<\frac{14}{2}+7$

$$\Rightarrow U_{n+1}<14$$

إذن : $\forall n\in\mathbb{N}:U_n<14$

2) أ. لدينا :
$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}: V_{n+1} &= 14-U_{n+1}\\ &= 14-\frac{1}{2}U_n-7\\ &= 7-\frac{1}{2}U_n\\ &= \frac{1}{2}(14-U_n)=\frac{1}{2}V_n\end{aligned}$$

إذن (V_n) هندسة أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_0=1$ ومنه $\forall n\in\mathbb{N}: V_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ب. لدينا :
$$\forall n\in\mathbb{N}: V_n=14-U_n \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}: U_n=14-V_n$$
$$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}: U_n=14-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

و بما ان : $-1<\frac{1}{2}<1$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ و بالتالي: $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=14$

جـ لدينا :
$$U_n>13.99 \Leftrightarrow 14-\left(\frac{1}{2}\right)^n>13.99 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n<14-13.99$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n<\ln(0.01) \Leftrightarrow -n\ln 2<-2\ln 10 \Leftrightarrow n>\frac{2\ln 10}{\ln 2}$$

ولدينا: $\frac{2\ln 10}{\ln 2}\simeq 6.67$ إذن $n=7$

تمريـــن 4 : (3 نقط)

1) كل إمكانية عبارة عن تأليفة لعنصرين من بين تسع عناصر وعددها هو $C_9^2=36$

لدينا A "$\underbracket{10}$ " إذن $p(A)=\frac{C_4^1\times C_5^1}{C_9^2}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

2) أ. نعتبر الحدث" يفوز سعيد " G إذن" $\underbracket{11}$ " G ومنه $p(G)=\frac{C_4^2}{C_9^2}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

ب. نعتبر الحدث" يفوز سعيد مرتين بالضبط" B إذن" 3حالات $\longleftarrow \underbracket{G/G/\overline{G}}$ " B

ومنه : $p(B)=C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{72}$

مسألة (8 نقط)

الجزء الأول

1 لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}_+^* : g'(x)=\dfrac{2x}{x^4}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x}$

وبما أن : $x>0$ فإن $\forall x\in\mathbb{R}_+^* : g'(x)>0$ ومنه g تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$

2 لدينا $g(1)=1-1+\ln 1=0$ وحيث أن g تزايدية على $\mathbb{R}_+^*$ فإن :

$$0<x\le 1\Rightarrow g(x)\le g(1)\Rightarrow g(x)\le 0 \quad \text{و} \quad x\ge 1\Rightarrow g(x)\ge g(1)\Rightarrow g(x)\ge 0$$

إذن :

x	0		1		$+\infty$
إشارة $g(x)$		-	0	+	

؛ Ċ þ] m ö \ ;

1 لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ و منه (C_f) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$

2 أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب- لدينا :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x} &= \lim_{t\to+\infty}\frac{\left(1+\ln\left(t^2\right)\right)^2}{t^2}\\
&=\lim_{t\to+\infty}\frac{1+2\ln\left(t^2\right)+\left(\ln\left(t^2\right)\right)^2}{t^2}\\
&=\lim_{t\to+\infty}\frac{1+4\ln(t)+4(\ln(t))^2}{t^2}\\
&=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}+4\frac{\ln(t)}{t^2}+4\frac{(\ln(t))^2}{t^2}\right)
\end{aligned}$$

وبما أن : $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{t^2}=0$ و $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(t)}{t^2}=0$ و $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{(\ln(t))^2}{t^2}=0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+\ln x)^2}{x}=0$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(1+\ln x)^2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)=0$

ج لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ إذن (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

3) أ لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}_+^* : f'(x)=\frac{2(1+\ln x)}{x}-\frac{2}{x^3}=\frac{2}{x}\left(1+\ln x-\frac{2}{x^2}\right)$

$$=\frac{2g(x)}{x}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$

ولدينا :

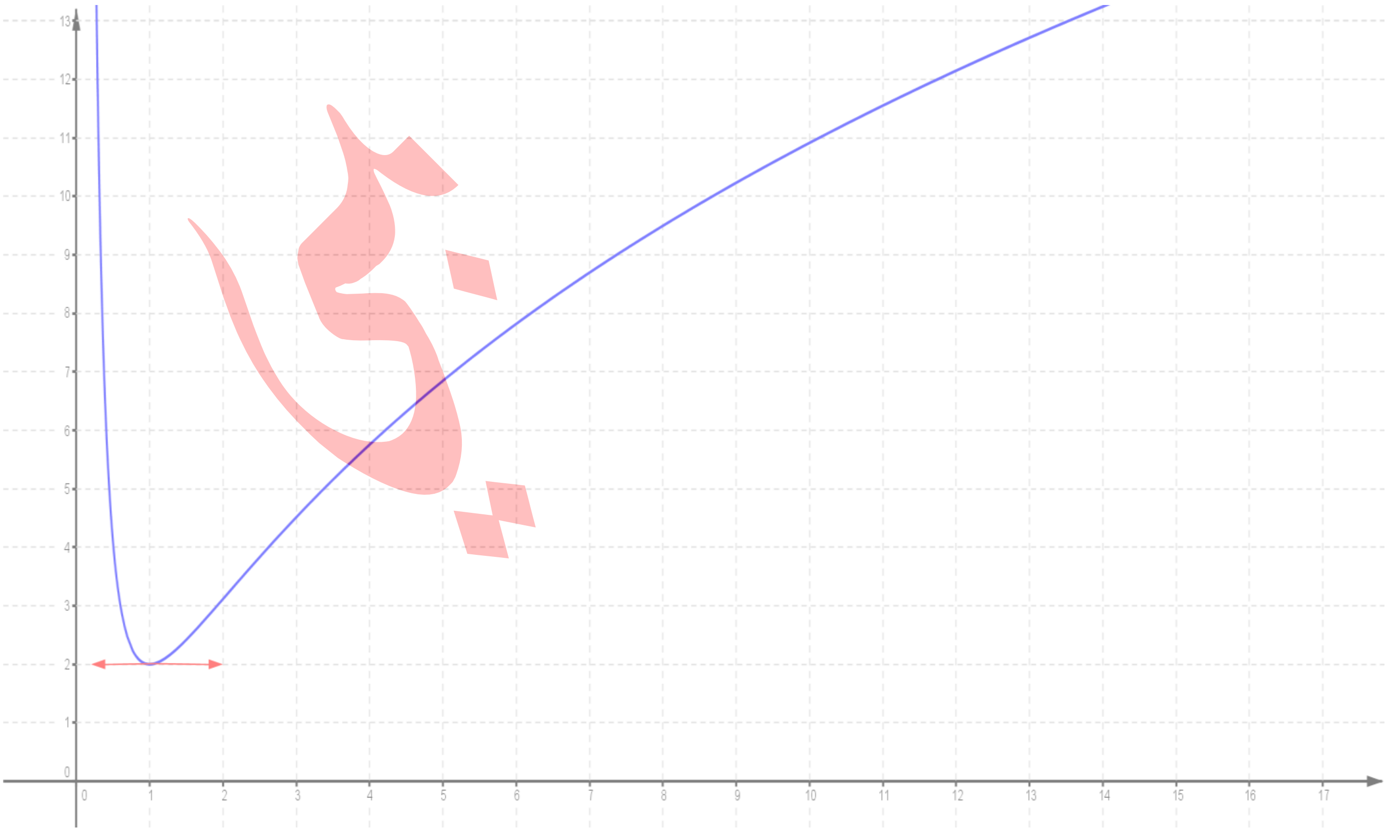
x	0		1		$+\infty$
إشارة $g(x)$		-	0	+	

ب لدينا :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	$-\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

لدينا 2 قيمة دنيا مطلقة للدالة f إذن $\forall x\in\mathbb{R}_+^* : f(x)\geq 2$

4) إنشاء (C_f) :



5) أ- لدينا : $H'(x) = \ln x + 1$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

إذن : $H(e) - H(1) = e$ $= I = \int_1^e (1+\ln x)dx$

ب- نضع :

$$\begin{cases} u(x) = (1+\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{2(1+\ln x)}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

إذن : $J = \left[x(1+\ln x)^2 \right]_1^e - 2\int_1^e (1+\ln x)dx$

$= 4e - 1 - 2e = 2e - 1$

ج- لدينا : $A(f) = \int_1^e |f(x)| dx \times 1cm^2 = \left(J - \left[\dfrac{1}{x}\right]_1^e\right) cm^2 = \dfrac{2e^2 - 1}{e} cm^2$