

تصحيح التمرين الأول

(1) لدينا : $\vec{u}(1,1,-1)$ متجهة منظمية للمستوى (P)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (P) تكتب على شكل : $(1).x + (1).y + (-1).z + d = 0$
و بما أن $A(2,1,0) \in (P)$ فإن : $(1).(2) + (1).(1) + (-1).(0) + d = 0$ أي : $d = -3$
و منه معادلة للمستوى (P) هي : $x + y - z - 3 = 0$

(2) طريقة 1:

بما أن (S) هي مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
فإن (S) هي الفلكة التي أحد أقطارها $[AB]$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{\Omega} = \frac{(2)+(-4)}{2} = -1 \\ y_{\Omega} = \frac{1+1}{2} = 1 \\ z_{\Omega} = \frac{0+0}{2} = 0 \end{array} \right.$$

و منه Ω مركز الفلكة (S) هو منتصف القطعة $[AB]$ أي :

أي $\Omega(-1,1,0)$ هي مركز الفلكة (S) .

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(-4-2)^2 + (1-1)^2 + (0-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

و شعاعها R هو : $\frac{6}{2} = 3$

طريقة 2:

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء

لدينا : $\overrightarrow{MA}(2-x, 1-y, -z)$ و $\overrightarrow{MB}(-4-x, 1-y, -z)$

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (S) &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \\ &\Leftrightarrow (2-x)(-4-x) + (1-y)(1-y) + (-z)(-z) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 - 2y + 1 + z^2 = 8 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow (x - (-1))^2 + (y - (1))^2 + (z - (0))^2 = (3)^2 \end{aligned}$$

و منه (S) هي الفلكة التي مركزها النقطة $\Omega(-1,1,0)$ و شعاعها 3

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|(-1) + (1) - (0) - 3|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad \text{أ} \quad (3)$$

بما أن $d(\Omega, (P)) < R$ فإن (P) يقطع (S) وفق دائرة (C)

ب- H مركز الدائرة (C) هي المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (P) أي هي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) المار من Ω و العمودي على المستوى (P)

لدينا : $\vec{u}(1,1,-1)$ متجهة منظمية للمستوى (P) و $(\Delta) \perp (P)$

إن $\vec{u}(1,1,-1)$ هي متجهة موجهة للمستقيم (Δ) و لدينا $\Omega(-1,1,0) \in (\Delta)$

$$\begin{cases} x = (-1) + t(1) = -1 + t \\ y = (1) + t(1) = 1 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = (0) + t(-1) = -t \end{cases}$$

إن تمثيل بارامترى للمستقيم (Δ) هو :

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

و بالتالي مثلوث إحداثيات H هو حل للنظمة :

$$\begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 + 1 = 0 \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = -1 \\ t = 1 \end{cases} \quad \text{أي : } H(0, 2, -1) \text{ هي مركز الدائرة } (C).$$

(4)

✓ لدينا $\vec{OH}(0, 2, -1)$ و $\vec{OB}(-4, 1, 0)$

$$\vec{OH} \wedge \vec{OB} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$$

✓ مساحة المثلث OHB :

$$S_{(OHB)} = \frac{1}{2} \|\vec{OH} \wedge \vec{OB}\| = \frac{1}{2} \times \sqrt{(1)^2 + (4)^2 + (8)^2} = \frac{\sqrt{81}}{2} = \frac{9}{2}$$

تصحيح التمرين الثاني

.I

(1)

$$\begin{aligned} |a| &= \sqrt{(2+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{4+4\sqrt{2}+2+2} \\ &= \sqrt{8+4\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{4(2+\sqrt{2})} \\ &= 2\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} a &= 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ a &= 2\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ a &= 2\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + 2i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

(3) أ- ليكن $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos^2(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2i\theta} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}}{4} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta} + 1 + e^{-2i\theta}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}(\cos(2\theta) + 1) \end{aligned}$$

و منه : $1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)$ لكل θ من \mathbb{R}

-ب-

$$\begin{aligned}
 a &= 2 \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) + i \cdot 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \\
 &= 2 \left(1 + \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) \right) + i \cdot 2 \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) \\
 &= 2 \times 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{8} \right) + i \cdot 2 \times 2 \cos \left(\frac{\pi}{8} \right) \sin \left(\frac{\pi}{8} \right) \\
 &= 4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{8} \right) + i \cdot 4 \cos \left(\frac{\pi}{8} \right) \sin \left(\frac{\pi}{8} \right)
 \end{aligned}$$

ج-

✓ بما أن $\cos \left(\frac{\pi}{8} \right) > 0$ فإن الشكل المثلثي للعدد a هو :

$$a = 4 \cos \left(\frac{\pi}{8} \right) \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} \right) \right)$$

$$a = |a| \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} \right) \right) \quad \checkmark \text{ لدينا :}$$

$$a = 2\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} \right) \right) \quad \text{إذن :}$$

حسب علاقة موافر :

$$a^4 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} \right) \right) \right)^4 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}} \right)^4 \cdot \left(\cos \left(4 \cdot \frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(4 \cdot \frac{\pi}{8} \right) \right)$$

$$a^4 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}} \right)^4 \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) \quad \text{إذن :}$$

$$a^4 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}} \right)^4 i \quad \text{ومنه :}$$

$$\left(\sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1 \text{ و } \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 \right)$$

.II

(1) لدينا $B(b)$ صورة $A(a)$ بالدوران R الذي مركزه $\Omega(\omega)$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

$$\text{إذن : } b - \omega = e^{i \frac{\pi}{2}} (a - \omega)$$

$$\text{إذن : } b - \sqrt{2} = i \cdot (2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - \sqrt{2})$$

$$\text{إذن : } b - \sqrt{2} = i \cdot (2 + i\sqrt{2})$$

$$b - \sqrt{2} = 2i - \sqrt{2} \quad \text{إذن :}$$

$$b = 2i \quad \text{ومنه :}$$

$$(2) \quad \text{لنحدد مجموعة النقط } M \text{ ذات اللحق } z \text{ بحيث } |z - 2i| = 2$$

$$|z - 2i| = 2 \Leftrightarrow |z - b| = 2 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow BM = 2$$

إذن مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها B و شعاعها 2

تصحيح التمرين الثالث

I التجربة " سحب في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق U_1 "

ليكن Ω_1 كون إمكانيات هذه التجربة

$$\text{لدينا : } \text{card } \Omega_1 = C_7^3 = 35$$

✓ الحدث A " الحصول على كرة حمراء واحدة و كرتين خضراوين "

$$\text{لدينا : } \text{card}A = C_4^1 \times C_3^2 = 4 \times 3 = 12$$

$$\text{إذن : } p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card } \Omega_1} = \frac{12}{35}$$

✓ الحدث B " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "

$$\text{لدينا : } \text{card}B = C_4^3 + C_3^3 = 4 + 1 = 5$$

$$\text{إذن : } p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card } \Omega_1} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

II التجربة " نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من U_1 ثم نسحب عشوائيا كرة واحدة من U_2 "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

$$\text{لدينا : } \text{card } \Omega = C_7^2 \times 5 = 21 \times 5 = 105$$

✓ الحدث C " الحصول على ثلاث كرات حمراء "

$$\text{لدينا : } \text{card}C = C_4^2 \times 3 = 6 \times 3 = 18$$

$$\text{إذن : } p(C) = \frac{\text{card}C}{\text{card } \Omega} = \frac{18}{105} = \frac{6}{35}$$

تصحيح المسألة

1. I (1)

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x(1 - \ln x) \neq 0, x > 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0, (1 - \ln x) \neq 0, x > 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0, \ln x \neq 1, x > 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq e, x > 0\}$$

$$=]0, e[\cup]e, +\infty[$$

2) أ-

| | | | |
|-------------|---|-----|-----------|
| x | 0 | e | $+\infty$ |
| $1 - \ln x$ | + | 0 | - |

$$\lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x > e}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x > e}} \frac{1}{x(1 - \ln x)} = -\infty \quad \checkmark \text{ لدينا :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x > e}} x = e \\ \lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x > e}} 1 - \ln x = 0^- \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x < e}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x < e}} \frac{1}{x(1 - \ln x)} = +\infty \quad \checkmark \text{ لدينا :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x < e}} x = e \\ \lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x < e}} 1 - \ln x = 0^+ \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

التأويل الهندسي :

$$x = e \quad \text{إذن : } (C_f) \text{ يقبل مقارب عمودي معادلته } x = e \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x < e}} f(x) = +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x > e}} f(x) = -\infty \end{array} \right. \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(1 - \ln x)} = 0 \quad \text{ب- لدينا :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln x = -\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

بما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ فإن (C_f) يقبل مقارب أفقي معادلته $y = 0$ بجوار $+\infty$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x(1-\ln x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x - x \ln x} = +\infty \quad \text{ج- لدينا :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0^+ \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -x \ln x = 0^+ \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

التأويل الهندسي :

بما أن : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ فإن (C_f) يقبل مقارب عمودي معادلته $x = 0$

(3) أ- ليكن $x \in D_f$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x(1-\ln x)} \right)'$$

$$f'(x) = \frac{-(x(1-\ln x))'}{(x(1-\ln x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{-((x)'(1-\ln x) + x(1-\ln x)')}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(1-\ln x - 1)}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$$\text{إذن : } f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2} \text{ لكل } x \text{ من } D_f$$

ب- ليكن $x \in D_f$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

لدينا : $x^2(1-\ln x)^2 > 0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\ln x$

✓ على المجال $]0,1[$: $\ln x \leq 0$ إذن $f'(x) \leq 0$ ومنه f تناقصية

✓ على المجالين $[1, e[$ و $]e, +\infty[$: $\ln x \geq 0$ إذن $f'(x) \geq 0$ ومنه f تزايدية

ج- جدول تغيرات f :

| | | | | |
|---------|-----------|------------|------------|-----------|
| x | 0 | 1 | e | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | -0 | + | + |
| $f(x)$ | $+\infty$ | \searrow | \nearrow | $+\infty$ |
| | | 1 | | |
| | | | | $-\infty$ |

II (1) أ- مبيانيا عدد حلول المعادلة (E) هو حلين لأن عدد نقط تقاطع (C_f) مع محور الأفاصيل هو نقطتين .

ب-

✓ g متصلة على المجال $[2,2;2,3]$

$$\begin{cases} g(2,2) = -0,02 \\ g(2,3) = 0,12 \end{cases} \Rightarrow g(2,2) \times g(2,3) < 0 \quad \checkmark$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة : المعادلة (E) تقبل حلا α بحيث : $2,2 < \alpha < 2,3$

(2) أ- ليكن $x \in D_f$:

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{1}{x(1-\ln x)} - x \\ &= \frac{1-x^2(1-\ln x)}{x(1-\ln x)} \\ &= \frac{g(x)}{x(1-\ln x)} \end{aligned}$$

$$\text{إذن : } f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)} \text{ لكل } x \text{ من } D_f$$

ب-

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow f(x) - x = 0 \\ &\Leftrightarrow g(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ أو } x = \alpha \end{aligned}$$

إذن (Δ) يقطع (C_f) في النقطتين اللتين أفصولهما 1 أو α

ج-

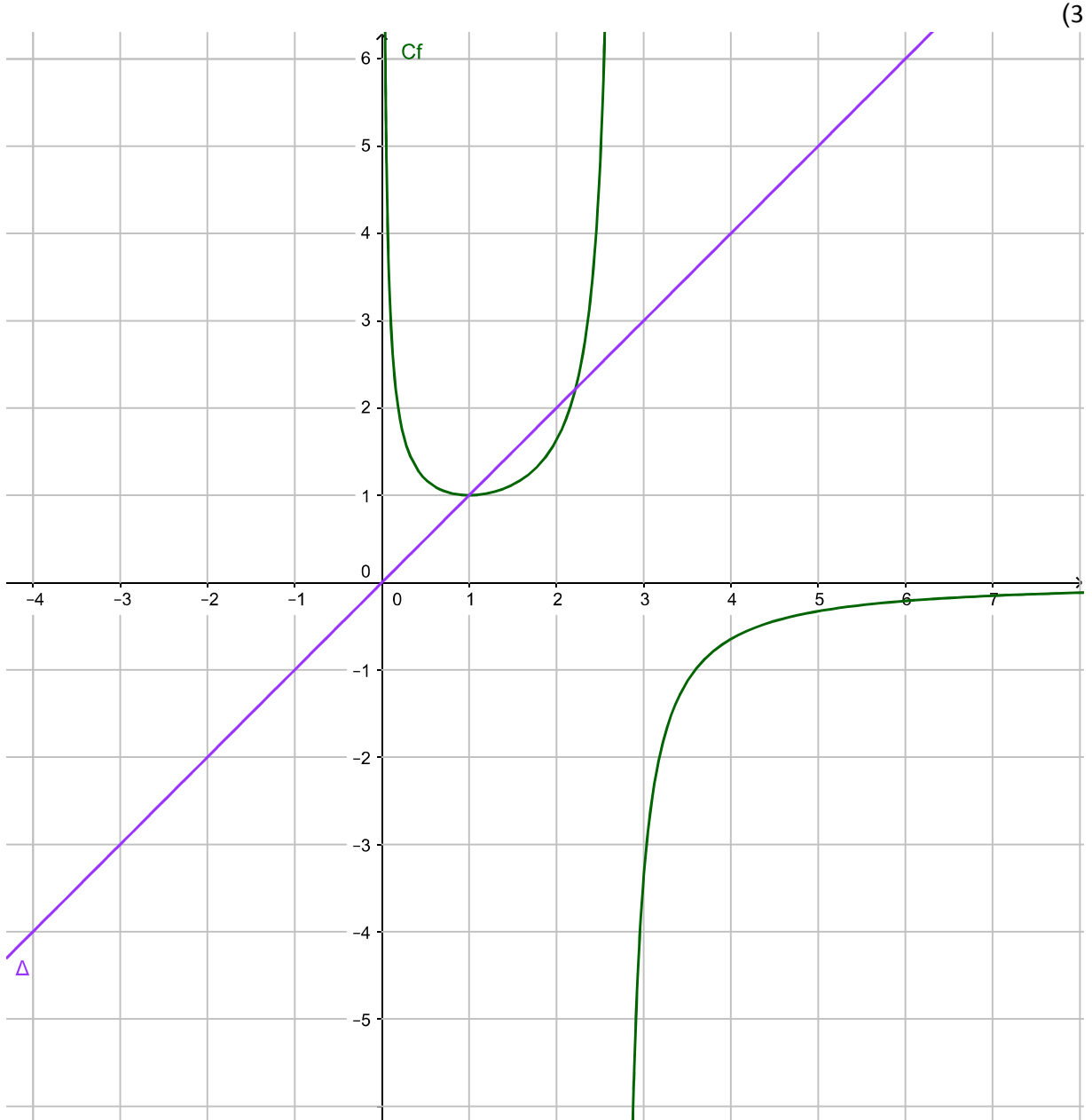
✓ على المجال $[1, \alpha]$:

لدينا (C_g) يوجد تحت محور الأفاصيل إذن $g(x) \leq 0$ لكل x من المجال $[1, \alpha]$

✓

| | | |
|---------------|---|----------|
| x | 1 | α |
| $g(x)$ | 0 | - 0 |
| $x(1-\ln(x))$ | | + |
| $f(x)-x$ | 0 | - 0 |

إذن : $f(x) - x \leq 0$ لكل x من المجال $[1, \alpha]$



$$\begin{aligned}
 \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} dx &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x} dx \\
 &= -\int_1^{\sqrt{e}} \frac{(1-\ln x)'}{1-\ln x} dx \\
 &= -\left[\ln|1-\ln(x)| \right]_1^{\sqrt{e}} \\
 &= -\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - 0 \right) \\
 &= \ln 2
 \end{aligned}$$

-ب-

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^{\sqrt{e}} |f(x) - x| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \\
 &= \int_1^{\sqrt{e}} (x - f(x)) dx \times 2cm \times 2cm \\
 &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{-g(x)}{x(1-\ln x)} dx \times 4cm^2 \\
 &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{x^2(1-\ln x) - 1}{x(1-\ln x)} dx \times 4cm^2 \\
 &= \int_1^{\sqrt{e}} \left(x - \frac{1}{x(1-\ln x)} \right) dx \times 4cm^2 \\
 &= \left(\int_1^{\sqrt{e}} x dx - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} dx \right) \times 4cm^2 \\
 &= \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_1^{\sqrt{e}} - \ln 2 \right) \times 4cm^2 \\
 &= \left(\frac{e-1}{2} - \ln 2 \right) \times 4cm^2 \\
 &= (2e - 2 - 4\ln 2) cm^2
 \end{aligned}$$

III (1)

✓ من أجل $n = 0$:

لدينا : $u_0 = 2$

إذن $1 \leq u_0 \leq \alpha$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

• نفترض أن : $1 \leq u_n \leq \alpha$

• و نبين أن : $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$

لدينا حسب الإفتراض $1 \leq u_n \leq \alpha$

و لدينا الدالة f تزايدية على المجال $[1, \alpha]$

إذن : $f(1) \leq f(u_n) \leq f(\alpha)$

و منه : $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$

✓ نستنتج أن : $1 \leq u_n \leq \alpha$ لكل n من \mathbb{N}

(2) حسب نتيجة السؤال (II 2) ج- لدينا : $f(x) - x \leq 0$ لكل x من $[1, \alpha]$

و بما أن $1 \leq u_n \leq \alpha$ لكل n من \mathbb{N}

فإن : $f(u_n) - u_n \leq 0$ لكل n من \mathbb{N}

إذن : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ لكل n من \mathbb{N}

و بالتالي المتتالية (u_n) تناقصية

(3)

✓ بما أن (u_n) تناقصية و مصغرة فإن (u_n) متقاربة

✓ لدينا : $\begin{cases} u_0 = 2 \in [1, \alpha] \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

• الدالة f متصلة على المجال $[1, \alpha]$

• $f([1, \alpha]) = [f(1), f(\alpha)] = [1, \alpha]$

• (u_n) متقاربة

إذن نهاية المتتالية (u_n) هي حل للمعادلة $f(x) = x$

لدينا : $f(x) = x \Leftrightarrow x = 1$ أو $x = \alpha$

و بما أن (u_n) تناقصية فإن : $u_n \leq u_0$ لكل n من \mathbb{N}

إذن $u_n \leq 2$ لكل n من \mathbb{N}

و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq 2$ لكل n من \mathbb{N}

و بالتالي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$