

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2019
-الموضوع-



المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

NS22

3	مدة الانجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها	الشعبة أو المسلك

تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة .

مكونات الموضوع

يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين و مسألة، مستقلة فيما بينها، و تتوزع حسب المجالات كما يلي:

3 نقط	الهندسة الفضائية	التمرين الأول
3 نقط	الأعداد العقدية	التمرين الثاني
3 نقط	حساب الاحتمالات	التمرين الثالث
11 نقطة	دراسة دالة عددية و حساب التكامل و المتتاليات العددية	المسألة

ln يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري .

التمرين الأول (3 نقط):

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(1, -1, -1)$ و $B(0, -2, 1)$ و $C(1, -2, 0)$

1 (أ) بين أن $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ 0.75

ب) استنتج أن $x + y + z + 1 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) 0.52) لتكن (S) الفلكة التي معادلتها $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 1 = 0$ بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(2, -1, 1)$ و أن شعاعها هو $R = \sqrt{5}$ 0.753 (أ) أحسب $d(\Omega, (ABC))$ مسافة النقطة Ω عن المستوى (ABC) 0.5ب) استنتج أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) (تحديد مركز وشعاع (Γ) غير مطلوب) 0.5

التمرين الثاني (3 نقط):

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - 2z + 4 = 0$ 0.75

2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) ، نعتبر النقط A و B و C و D التي أحاقهاعلى التوالي هي: $a = 1 - i\sqrt{3}$ و $b = 2 + 2i$ و $c = \sqrt{3} + i$ و $d = -2 + 2\sqrt{3}$

أ) تحقق أن $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$ 0.5

ب) استنتج أن النقط A و C و D مستقيمية. 0.253) ليكن z لحق نقطة M و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{-\pi}{3}$

تحقق أن $z' = \frac{1}{2}az$ 0.5

4) لتكن H صورة النقطة B بالدوران R ، و h لحقها، و P النقطة التي لحقها p حيث $p = a - c$

أ) تحقق أن $h = ip$ 0.5

ب) بين أن المثلث OHP قائم الزاوية و متساوي الساقين في O 0.5

التمرين الثالث (3 نقط):

يحتوي صندوق على عشر كرات: ثلاث كرات خضراء و ست كرات حمراء و كرة واحدة سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس.

نسحب عشوائيا و تأنيا ثلاث كرات من الصندوق.

نعتبر الأحداث التالية: A: "الحصول على ثلاث كرات خضراء"

و B: "الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون"

و C: "الحصول على كرتين على الأقل من نفس اللون"

1) بين أن: $p(A) = \frac{1}{120}$ و $p(B) = \frac{7}{40}$ 2

2) أحسب $p(C)$ 1

المسألة (11 نقطة) :

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$

و (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (الوحدة 1cm)

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا 0.5

(2) (أ) تحقق أن لكل x من المجال $]0, +\infty[$: $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x$ 0.25

(ب) استنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 0.5

(ج) بين لكل x من المجال $]0, +\infty[$: $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ ثم استنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ 0.5

(د) بين أن المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجيميا بجوار $+\infty$ اتجاهه المقارب المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ 0.75

(3) (أ) بين أن لكل x من $]0, 1[$: $(x-1) + \ln x \leq 0$ وأن لكل x من $[1, +\infty[$: $(x-1) + \ln x \geq 0$ 0.5

(ب) بين أن لكل x من $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$ 1

(ج) ضع جدول تغيرات الدالة f 0.5

(4) (أ) بين أن $f''(x) = \frac{2-\ln x}{x^2}$ لكل x من $]0, +\infty[$ 0.5

(ب) استنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج إحداثياتها 0.5

(5) (أ) بين أن لكل x من $]0, +\infty[$ ، $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$ ، واستنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) 0.5

(ب) أنشئ (Δ) و (C) في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) 1

(6) (أ) بين أن الدالة $H : x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \ln x$ على المجال $]0, +\infty[$ 0.5

(ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$ 0.75

(ج) احسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = e$ و $x = 1$ 0.5

الجزء الثاني :

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من \mathbb{N}

(1) (أ) بين بالترجع أن لكل n من \mathbb{N} : $1 \leq u_n \leq e$ 0.5

(ب) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية 0.5

(ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة 0.5

(2) احسب نهاية المتتالية (u_n) 0.75



01.

(3 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(1, -1, -1)$ و $B(0, -2, 1)$ و $C(1, -2, 0)$.

01.

أ- نبين أن : $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ (0.75 ن)

$$\overline{AC} \begin{pmatrix} 1-1 \\ -2+1 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \overline{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} . \text{ و } \overline{AB} \begin{pmatrix} 0-1 \\ -2+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \overline{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} : \text{ لدينا}$$

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = (-1+2)\vec{i} - (-1+0)\vec{j} + (1+0)\vec{k} : \text{ ومنه}$$

خلاصة: $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

ب- نستنتج أن : $x+y+z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) (0.5 ن)

طريقة 1 :

✓ لدينا : المتجهة $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ أي المتجهة $\overline{AB} \wedge \overline{AC}(1,1,1)$ منظمية على المستوى (ABC)

$$M(x,y,z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot (\overline{AB} \wedge \overline{AC}) = 0 : \text{ ومنه } \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \times (x-1) + 1 \times (y+1) + 1 \times (z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1+y+1+z+1=0$$

$$\Leftrightarrow x+y+z+1=0$$

خلاصة : $x+y+z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

طريقة 2 :

• المتجهة $\overline{AB} \wedge \overline{AC}(1,1,1)$ متجهة منظمية على (ABC) إذن معادلة ديكارتية له هي على شكل $x+y+z+d=0$.

• النقطة $A(1, -1, -1)$ تنتمي إلى المستوى (ABC) فإن : $1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times (-1) + d = 0$: ومنه : $d = 1$.

خلاصة: $x+y+z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

02. لتكن (S) الفلكة التي معادلتها : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 1 = 0$. نتحقق من أن مركز الفلكة (S) هو $\Omega(2, -1, 1)$ و

شعاعها هو $R = \sqrt{5}$ (0.75 ن)

$$\text{لدينا : } x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} - 4 + \underbrace{y^2 + 2y + 1}_{(y+1)^2} - 1 + \underbrace{z^2 - 2z + 1}_{(z-1)^2} - 1 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 + (z-1)^2 - 1 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 5 = \sqrt{5}^2$$



و هي تمثل معادلة ديكارتية لفلكة مركزها $\Omega(2,-1,1)$ و شعاعها $R = \sqrt{5}$.

خلاصة: مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(2,-1,1)$ و أن شعاعها $R = \sqrt{5}$.

03

أ- نحسب: $d(\Omega, (ABC))$ (0.5 ن)

$$\text{لدينا: } d(\Omega, (ABC)) = \frac{|2-1+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

خلاصة: $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{3}$

ب- نستنتج أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة وفق دائرة (Γ) (0.5 ن)

بما أن: $\sqrt{5}$ هو شعاع الدائرة و لدينا: $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{3} < \sqrt{5}$

خلاصة: المستوى (ABC) يقطع الفلكة وفق دائرة (Γ) .

02 (3 نقط)

01. نحل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة: $z^2 - 2z + 4 = 0$ (0.75 ن)

✓ نحسب المميز Δ : لدينا: $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12 < 0$

إذن المعادلة لها حلين عقديين مترافقين هما: $z_1 = \frac{2+i\sqrt{-\Delta}}{2 \times 1} = \frac{2+i\sqrt{12}}{2} = \frac{2+i2\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3}$ و $z_2 = \bar{z}_1 = 1-i\sqrt{3}$

خلاصة: مجموعة حلول المعادلة هي: $S = \{1+i\sqrt{3}; 1-i\sqrt{3}\}$

02. في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) نعتبر النقط C, B, A و D التي أحاقها على

التوالي هي: $a = 1-i\sqrt{3}$, $b = 2+2i$, $c = \sqrt{3}+i$, و $d = -2+2\sqrt{3}$.

أ- نتحقق أن: $a-d = -\sqrt{3}(c-d)$ (0.5 ن)

لدينا: $c-d = \sqrt{3}+i - (-2+2\sqrt{3}) = -\sqrt{3}+2+i$

$$\text{و } a-d = 1-i\sqrt{3} - (-2+2\sqrt{3}) = 3-2\sqrt{3}-i\sqrt{3} = -\sqrt{3} \left(\frac{-\sqrt{3}+2+i}{c-d} \right) = -\sqrt{3}(c-d)$$

خلاصة: $a-d = -\sqrt{3}(c-d)$

ب- نستنتج أن النقط C, A و D مستقيمية. (0.25 ن)

لدينا: $a-d = -\sqrt{3}(c-d) \Leftrightarrow z_{\overline{DA}} = -\sqrt{3}z_{\overline{DC}}$ (مع $z_{\overline{DC}}$ و $z_{\overline{DA}}$ لحقي كل من المتجهتين \overline{DA} و \overline{DC} على التوالي)

$$\Leftrightarrow \overline{DA} = -\sqrt{3}\overline{DC}$$

و بالتالي المتجهتين \overline{DA} و \overline{DC} مستقيمتين.

خلاصة: النقط C, A و D مستقيمية.

03. ليكن z لحق نقطة M و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{3}$.



نتحقق أن : $z' = \frac{1}{2}az$ (0.5 ن)

الكتابة العقدية للدوران R هي : $z' - \omega = (z - \omega)e^{i\theta}$ مع ω هو لحد مركز الدوران و θ هو زاوية الدوران .

ومنه : $z' - 0 = (z - 0)e^{i\frac{-\pi}{3}}$ ؛ (لأن $\omega = 0$ هو لحد O مركز الدوران R و $\theta = \frac{-\pi}{3}$ زاوية الدوران)

$$\begin{aligned} z' &= z \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) \\ &= z \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \\ &= z \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= z \frac{1}{2} (1 - i\sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{2}az \quad ; \quad (1 - i\sqrt{3} = a) \end{aligned}$$

و بالتالي الكتابة العقدية للدوران R هي $z' = \frac{1}{2}az$

خلاصة : $z' = \frac{1}{2}az$

04. لتكن H صورة النقطة B بالدوران R ؛ و h لحدتها ؛ و P النقطة التي لحدتها p حيث $p = a - c$.

أ- نتحقق أن : $h = ip$ (0.5 ن)
لدينا :

$$\begin{aligned} R(B) = H &\Leftrightarrow h = \frac{1}{2}ab \\ &\Leftrightarrow h = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(2 + 2i) \\ &\Leftrightarrow h = (1 - i\sqrt{3})(1 + i) \\ &\Leftrightarrow h = (1 - i\sqrt{3}) + i(1 - i\sqrt{3}) \\ &\Leftrightarrow h = i \underbrace{(-i - \sqrt{3})}_{-c} + i \underbrace{(1 - i\sqrt{3})}_a \\ &\Leftrightarrow h = i(a - c) \\ &\Leftrightarrow h = ip \end{aligned}$$

خلاصة : $h = ip$

ب- نبين أن : المثلث OHP قائم الزاوية و متساوي الساقين في O (0.5 ن)
لدينا :

$$\frac{h-0}{p-0} = \frac{ip}{p} = i \Rightarrow \begin{cases} \frac{|h-0|}{|p-0|} = |i| \\ \overline{(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH})} \equiv \arg\left(\frac{h-0}{p-0}\right) [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{OH}{OP} = 1 \\ \overline{(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH})} \equiv \arg(i) [2\pi] ; \left(\frac{h}{p} = i\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} OH = OP \\ \overline{(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

و منه :

- $OH = OP$ المثلث OHP متساوي الساقين في O .
 - $\overline{(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ المثلث OHP قائم الزاوية في O
- خلاصة:** المثلث OHP قائم الزاوية و متساوي الساقين في O .

03. (3 نقط)

يحتوي صندوق: على 10 كرات : ثلاث كرات خضراء و ست كرات حمراء و كرة واحدة سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس .
نعتبر التجربة التالية : سحب عشوائيا و تانيا ثلاث كرات من الصندوق .
نعتبر الأحداث التالية :

- ✓ الحدث A : " الحصول على ثلاث كرات خضراء "
- ✓ الحدث B : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "
- ✓ الحدث C : " الحصول على كرتين على الأقل من نفس اللون "

01. نبين أن : $p(A) = \frac{1}{120}$ و $p(B) = \frac{7}{40}$ (2 ن)

✓ عدد السحبات الممكنة (أي $\text{card}\Omega$) :
سحب ثلاث كرات في آن واحد من بين 10 كرات يمثل تاليفة ل 3 من بين 10 . ومنه عدد السحبات هو عدد التاليفات ل 3 من

$$\text{card}\Omega = C_{10}^3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120 \text{ : إذن}$$

$$\text{card}\Omega = C_{10}^3 = 120 \text{ : إذن}$$

• نبين أن : $p(A) = \frac{1}{120}$

- ✓ عدد السحبات التي تحقق الحدث A (أي $\text{card}A$) :
- ✓ الحدث A " الحصول على ثلاث كرات خضراء "

❖ الكرات الثلاث المسحوبة في آن واحد من اللون الأخضر من بين 3 إذن $C_3^3 = \frac{3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3} = 1$ (ملحوظة $C_n^n = 1$)

$$\text{و منه : } \text{card}A = C_3^3 = 1 \text{ و بالتالي : } p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$$

خلاصة : $p(A) = \frac{1}{120}$

❖ نبين أن : $p(B) = \frac{7}{40}$

✓ عدد السحبات التي تحقق الحدث B (أي cardB) :

✓ الحدث " B " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "

الحدث B نعبر عنه أيضا بما يلي : " الكرات الثلاث المسحوبة من اللون أخضر أو الكرات الثلاث المسحوبة من اللون أحمر "

▪ الكرات الثلاث المسحوبة و في آن واحد و من اللون أخضر من بين 3 كرات من اللون أخضر إذن $C_3^3 = 1$.

▪ الكرات الثلاث المسحوبة و في آن واحد و من اللون أحمر من بين 6 كرات من اللون أحمر إذن : $C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$.

▪ ومنه $cardB = C_3^3 + C_6^3 = 1 + 20 = 21$

ومنه : $p(B) = \frac{cardB}{card\Omega} = \frac{C_3^3 + C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{21}{120} = \frac{7 \times 3}{3 \times 40} = \frac{7}{40}$

خلاصة : $p(B) = \frac{7}{40}$

02. نحسب : $p(C)$: (ن 1)

✓ الحدث C : " الحصول على كرتين على الأقل من نفس اللون "

✓ عدد السحبات التي تحقق الحدث C (أي cardC) :

الطريقة 1 :

الحدث المضاد للحدث C هو \bar{C} " الحصول على كرة واحدة من كل لون "

الحدث \bar{C} نعبر عنه أيضا بما يلي : " الكرات الثلاث المسحوبة من ألوان مختلفة "

ومنه : $card\bar{C} = C_3^1 \times C_6^1 \times C_1^1 = 3 \times 6 \times 1 = 18$

ومنه : $cardC = card\Omega - card\bar{C} = 120 - 18 = 102$

ومنه : $p(C) = \frac{cardC}{card\Omega} = \frac{card\Omega - card\bar{C}}{C_{10}^3} = \frac{120 - 18}{120} = \frac{102}{120} = \frac{6 \times 17}{6 \times 20} = \frac{17}{20}$

خلاصة : $p(C) = \frac{17}{20}$

الطريقة 2 :

الحدث C نعبر عنه أيضا بما يلي : " C " (الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون) أو (الحصول على كرتين بالضبط من نفس اللون)

• (الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون) إذن الحدث B إذن $cardB = C_3^3 + C_6^3 = 1 + 20 = 21$

• (الحصول على كرتين بالضبط من نفس اللون) إذن : " (كرتين من اللون أخضر و كرة من اللونين المتبقين) أو (كرتين من اللون

أحمر و كرة من اللونين المتبقين) "

• (كرتين من اللون أخضر و كرة من اللونين المتبقين و عددها 7) و هو يتم ب $C_3^2 \times C_7^1$ كيفية مختلفة .

• (كرتين من اللون أحمر و كرة من اللونين المتبقين و عددها 4) و هو يتم ب $C_6^2 \times C_4^1$ كيفية مختلفة .

• إذن (الحصول على كرتين بالضبط من نفس اللون) و هو يتم ب $C_3^2 \times C_7^1 + C_6^2 \times C_4^1 = 3 \times 7 + 15 \times 4 = 81$ كيفية مختلفة .

• ومنه : $cardC = C_3^3 + C_6^3 + C_3^2 \times C_7^1 + C_6^2 \times C_4^1 = 1 + 20 + 3 \times 7 + 15 \times 4 = 102$

و بالتالي : $p(C) = \frac{cardC}{card\Omega} = \frac{C_3^3 + C_6^3 + C_3^2 \times C_7^1 + C_6^2 \times C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{1 + 20 + 3 \times 7 + 15 \times 4}{120} = \frac{102}{120} = \frac{6 \times 17}{6 \times 20} = \frac{17}{20}$

خلاصة : $p(C) = \frac{17}{20}$



04 (11 نقطة)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي: $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$.
و (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (الوحدة 1 cm).

I. الجزء الأول:

01. أحسب $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ ثم أول النتيجة هندسياً. (0.5 ن)❖ نحسب: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$

لدينا:

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\ln x = +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\ln x)^2 = +\infty \end{cases}$$

$$\bullet \text{ ومنه: } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 = +\infty$$

❖ خلاصة: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

❖ نؤول النتيجة هندسياً:

بما أن: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ إذن المنحنى (C) يقبل مقارباً عمودياً هو المستقيم الذي معادلته $x = 0$ (أي محور الأرتيب)

02.....

أ- نتحقق أن: لكل x من المجال $]0, +\infty[$: $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x$ (0.25 ن)

لدينا:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x &= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln x \times \ln x - \ln x \\ &= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\ln x)^2 - \ln x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

❖ خلاصة: لكل x من المجال $]0, +\infty[$: $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x$

ب- نستنتج أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (0.5 ن)



لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right) \ln x = +\infty$

و منه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right) \ln x \right) = +\infty$

• خلاصة : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ج- نبين أن لكل x من المجال $]0, +\infty[$: $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$ ثم نستنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (0.5 ن)

• نبين أن : $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$

لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{(\ln x)^2}{x} &= \frac{\left(\ln(\sqrt{x^2}) \right)^2}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{(2 \ln \sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2} ; (\ln x^r = r \ln x ; r \in \mathbb{Q}) \\ &= \frac{4 (\ln \sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2} \\ &= 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 \end{aligned}$$

• خلاصة : $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$

• نستنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{\ln t}{t} \right)^2 ; (t = \sqrt{x} ; x \rightarrow +\infty ; t \rightarrow +\infty) \\ &= 0 ; \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \right) \end{aligned}$$

• خلاصة : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$



د- نبين أن المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجيميا بجوار $+\infty$ اتجاهه المقارب المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ (0.75 ن) لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2} \frac{(\ln x)^2}{x} = 1$$

لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (حسب ما سبق)

إذن : $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ (لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right) \ln x - x \right) = +\infty$)

إذن : $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty$

وبالتالي : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ و $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty$

خلاصة : المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجيميا في اتجاه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ بجوار $+\infty$.

03

أ- نبين أن لكل x من $]0,1[$: $(x-1) + \ln x \leq 0$ وأن لكل x من $[1, +\infty[$: $(x-1) + \ln x \geq 0$ (0.5 ن) نبين أن لكل x من $]0,1[$: $(x-1) + \ln x \leq 0$.

لدينا :

$$0 < x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 < x-1 \leq 0 \\ \ln x \leq 0 \end{cases}$$

(مجموع عددين سالبين هو عدد سالب) $\Rightarrow (x-1) + \ln x \leq 0$

ومنه : لكل x من $]0,1[$: $(x-1) + \ln x \leq 0$.

نبين أن لكل x من $[1, +\infty[$:

لدينا :

$$x \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases}$$

(مجموع عددين موجبين هو عدد موجب) $\Rightarrow (x-1) + \ln x \geq 0$

ومنه : لكل x من $[1, +\infty[$: $(x-1) + \ln x \geq 0$.

خلاصة : لكل x من $]0,1[$: $(x-1) + \ln x \leq 0$ وأن لكل x من $[1, +\infty[$: $(x-1) + \ln x \geq 0$.

ملحوظة : يمكن استعمال جدول الإشارة لكل من $x-1$ و $\ln x$ على المجال $]0, +\infty[$.

ب- نبين أن لكل x من $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$ (1 ن)

لدينا :



$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right)' \\ &= 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \times 2 (\ln x)' \ln x \\ &= 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \times \ln x \\ &= \frac{x-1+\ln x}{x} \end{aligned}$$

خلاصة: لكل x من $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$

ج- نضع جدول تغيرات الدالة f (0.5 ن)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$+\infty$ \searrow $\frac{3}{2}$	$+\infty$ \nearrow

04

أ- نبين أن لكل x من $]0, +\infty[$: $f''(x) = \frac{2-\ln x}{x^2}$ (0.5 ن)
لدينا :

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' \\ &= \left(\frac{x-1+\ln x}{x} \right)' \\ &= \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \times x - (x-1+\ln x) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{\cancel{x} + 1 - \cancel{x} + 1 - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{2 - \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

خلاصة: لكل x من $]0, +\infty[$: $f''(x) = \frac{2-\ln x}{x^2}$

ب- نستنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد إحداثيتها (0.5 ن)

- ❖ لتحديد نقطة انعطاف الدالة f ندرس إشارة f'' الدالة المشتقة الثانية ل f .
- ❖ إشارة f'' هي إشارة $2 - \ln x$ لأن $x^2 > 0$
- لدينا : $2 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 2$

$$\Leftrightarrow x \leq e^2$$

ومنه إشارة " f بواسطة الجدول التالي :

x	0	e ²	+∞
f''(x)		+	0 -

❖ من خلال الجدول :

الدالة المشتقة الثانية f'' تنعدم في e² و تتغير إشارتها بجوار e² إذن النقطة التي زوج إحداثيتها $(e^2, f(e^2)) = (e^2, \frac{2e^2+1}{2})$

هي نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f .

..05

أ- نبين أن لكل x من]0, +∞[: $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$ ثم نستنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ) ... (0.5 ن)

• نبين أن لكل x من]0, +∞[: $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$

$$\frac{1}{2}(\ln x - 1)^2 = \frac{1}{2}((\ln x)^2 - 2\ln x + 1)$$
 لدينا :

$$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2} + x - x$$

$$= f(x) - x$$

خلاصة : لكل x من]0, +∞[: $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$

• نستنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ) .

لهذا ندرس إشارة : $f(x) - x$ أي إشارة $\frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$ و هي بدورها موجبة على]0, +∞[ولكن تنعدم في $\ln x - 1 = 0$ أي $x = e$.

خلاصة :

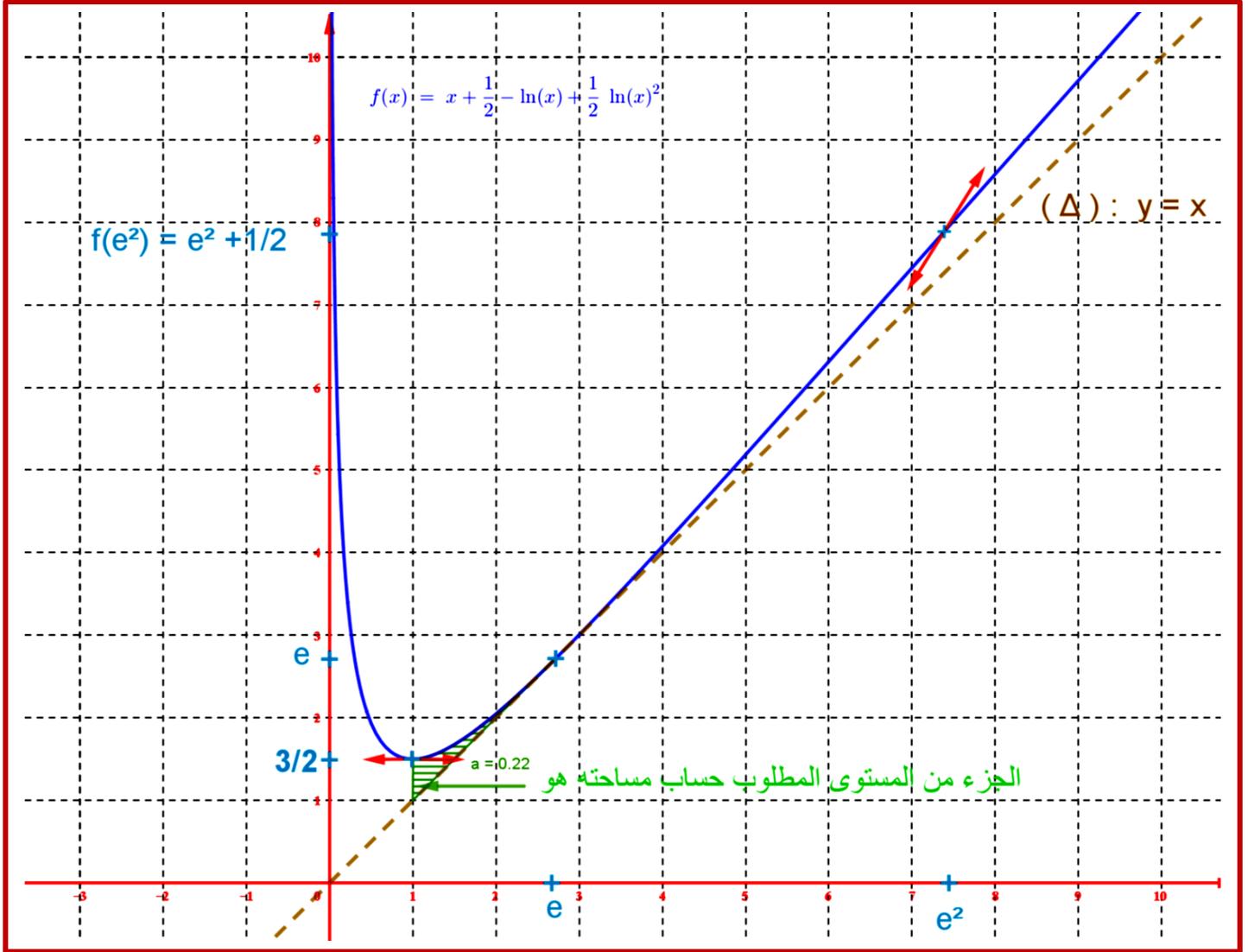
➤ المنحنى (C) يوجد قطعاً فوق المستقيم (Δ) على كل من المجالين]0, e[و]e, +∞[.

➤ المنحنى (C) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة التي إحداثيتها $(e, f(e)) = (e, e)$

➤ نلخص ذلك بواسطة الجدول التالي :

x	0	e	+∞
$f(x) - x$ و $(\ln x - 1)^2$ لهما نفس الإشارة		+	0 +
الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ)		(C) فوق (Δ)	(C) فوق (Δ)
		↓ x = e و (C) يتقطعان في	

ب- نثني المستقيم (Δ) والمنحنى (C) في نفس المعظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (1 ن)



06

أ- نبين أن: الدالة $H: x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $h: x \mapsto \ln x$ على $]0, +\infty[$ (0.5 ن)

لهذا نبين أن: $H'(x) = h(x)$.

لدينا: $H'(x) = (x \ln x - x)'$

$$= (x)' \ln x + (x)(\ln x)' - (x)'$$

$$= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1$$

$$= \ln x + 1 - 1$$

$$= \ln x = h(x)$$

ومنه: $H'(x) = h(x)$

خلاصة: الدالة $H: x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $h: x \mapsto \ln x$ على $]0, +\infty[$.

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء نبين أن : $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$ (0.75 ن)

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = \int_1^e (\ln x) \times (\ln x) dx$$

نضع :

$$u(x) = \ln x \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$(1) \downarrow \quad (2) \searrow \quad - \quad \downarrow (3)$$

$$v'(x) = \ln x \quad v(x) = x \ln x - x$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \int_1^e (\ln x)^2 dx &= \overbrace{\left[\ln x \times (x \ln x - x) \right]_1^e}^{(1)} - \overbrace{\int_1^e \frac{1}{x} \times (x \ln x - x) dx}^{(2)} \\ &= (\ln e \times (e \ln e - e)) - (\ln 1 \times (1 \ln 1 - 1)) - \int_1^e (\ln x - 1) dx \\ &= (1(e \times 1 - e) - 0) - \int_1^e \ln x dx + \int_1^e 1 dx \\ &= 0 - [x \ln x - x]_1^e + [x]_1^e \quad ; \quad (H'(x) = h(x)) \\ &= -((e \times 1 - e) - (1 \times 0 - 1)) + (e - 1) \\ &= 0 - 1 + e - 1 \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2 \quad \text{خلاصة :}$$

ج- نحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = e$ و $x = 1$.

..... (0.5 ن)

المساحة المطلوبة هي :

$$\begin{aligned} \text{(وحدة المساحة)} \quad cm^2 &= \left(\int_1^e |f(x) - x| dx \right) \times \|i\| \times \|j\| = \left(\int_1^e (f(x) - x) dx \right) \times \|i\| \times \|j\| \\ &= \left(\int_1^e \left(x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 - x \right) dx \right) \times 1 \times 1 \quad cm^2 \\ &= \int_1^e \frac{1}{2} dx - \int_1^e \ln x dx + \frac{1}{2} \underbrace{\int_1^e (\ln x)^2 dx}_{e-2} \quad cm^2 \\ &= \frac{1}{2} [x]_1^e - [x \ln x - x]_1^e + \frac{1}{2} (e - 2) \quad cm^2 \\ &= \frac{1}{2} (e - 1) - \underbrace{((e \times 1 - e) - (1 \times 0 - 1))}_{-1} + \frac{1}{2} (e - 2) \quad cm^2 \\ &= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} - 1 + \frac{e}{2} - 1 = e - \frac{5}{2} \quad cm^2 \end{aligned}$$

خلاصة: مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ هي $\frac{2e-5}{2} \text{ cm}^2$.

II. الجزء الثاني:

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من \mathbb{N} .

01.

أ- نبين بالترجع أن: $1 \leq u_n \leq e$ لكل n من \mathbb{N} (ن 5.0)

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n = 0$
- لدينا: $1 \leq u_0 = 1 \leq e$ و منه العلاقة صحيحة من أجل $n = 0$.
- نفترض أن العلاقة صحيحة للرتبة n : أي $1 \leq u_n \leq e$ (معطيات الترجع).
- نبين أن العلاقة صحيحة ل $n + 1$: أي نبين أن: $1 \leq u_{n+1} \leq e$

حسب معطيات الترجع لدينا: $1 \leq u_n \leq e$.

و منه: $1 \leq u_n \leq e \Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(e)$ (لأن f تزايدية على $[1, e]$ و $1 \leq u_n \leq e$)

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq e \quad (\text{لأن } f(e) = e \text{ تقاطع مع المستقيم } (\Delta) \text{ و } f(1) = \frac{3}{2} \text{ جدول تغيرات})$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq e$$

و منه: العلاقة صحيحة ل $n + 1$.

خلاصة: $1 \leq u_n \leq e$ لكل n من \mathbb{N} .

ب- نبين أن المتتالية (u_n) تزايدية (ن 0.5)

لهذا نبين أن: $u_{n+1} - u_n \geq 0$ لكل n من \mathbb{N} .

ليكن n من \mathbb{N} نضع $x = u_n$ ولدينا: $1 \leq u_n \leq e$ أي $u_n \in [1, e]$

حسب نتيجة السؤال I (5) (-): (C) فوق (Δ) على $[1, e]$ إذن: لكل x من $[1, e]$ فإن $f(x) - x \geq 0$ أي $f(x) \geq x$.

أي: $x \in [1, e] \Rightarrow f(x) \geq x$

$$\Rightarrow f(u_n) \geq u_n ; (u_n = x \text{ و } 1 \leq u_n \leq e)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq u_n ; (u_{n+1} = f(u_n))$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$$

وبالتالي: لكل n من \mathbb{N} لدينا $u_{n+1} \geq u_n$ (أو أيضا $u_{n+1} - u_n \geq 0$)

خلاصة: المتتالية (u_n) تزايدية.

ملحوظة: يمكن استعمال الترجع (أي نبين لكل n من \mathbb{N} لدينا $u_{n+1} \geq u_n$)

ج- نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة (ن 0.5)

لدينا:

✓ المتتالية (u_n) تزايدية.

✓ المتتالية (u_n) مكبورة (لأن $1 \leq u_n \leq e$)

إذن حسب خاصية : المتتالية (u_n) متقاربة (مع نهايتها l حيث $l \in \mathbb{R}$)

خلاصة : (u_n) متقاربة

02. نحدد نهاية المتتالية (u_n) (75.0 ن)

• المتتالية تكتب على شكل $u_{n+1} = f(u_n)$

• الدالة f متصلة على $I = [1, e]$

• $f(I) = [f(1), f(e)] = \left[\frac{3}{2}, e\right] \subset I = [1, e]$ (لأن f متصلة و تزايدية على $[1, e]$ و $f(1) = \frac{3}{2}$ و $f(e) = e$)

• لدينا : $u_0 = 1 \in [1, e]$

• (u_n) متقاربة إذن نهايتها l من \mathbb{R} .

إذن : l هو حل للمعادلة $f(x) = x$; $x \in I = [1, e]$ (حسب خاصية).

أي ندرس تقاطع المنحنى (C) و المستقيم (Δ) على $[1, e]$ و حسب ما سبق المنحنى (C) و المستقيم (Δ) يتقاطعان في

نقطة وحيدة حيث زوج إحداثياتها هي (e, e) و منه حل المعادلة السابقة هي $x = e \in [1, e]$ إذن $l = e$

خلاصة : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$