سلسلة 2	الإشتقـــاق	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 : نعتبر الدالة العددية : $f(x)=\dfrac{2x^2+2x-1}{(x+1)^2}$

1) حدد Df

2) احسب $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\mapsto-1} f(x)$

3) بين أن : $\forall x\in Df \quad f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}\times\dfrac{x+2}{x+1}$

4) أوجد معادلة المماس في النقطة $x_0=0$

5) اعط جدول تغيرات f

6) حدد مطارف الدالة f

تمرين 2 : نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x} & ;\ x>1 \\ f(x)=\sqrt{2-x} & ;\ x\leq 1\end{cases}$

1) احسب $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$

2) هل تقبل f نهاية في 1 ؟

3) ادرس قابلية اشتقاق f في 1 .

4) حدد معادلة نصفي المماس في النقطة ذات الأفصول 1

5) احسب $f'(x)$ على كل من $]1;+\infty[$ و $]-\infty;1[$

6) أعط جدول تغيرات f

تمرين 3 : نعتبر الدالة : $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$

1) احسب $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$

2) احسب $f'(x)$ لكل x من IR

3) أعط جدول تغيرات f

4) هل لـ f قيم قصوية أو دنوية مطلقة ؟

تمرين 4 : بدراسة تغيرات الدالة $f(x)=2x+\dfrac{1}{x^2}$ على $]0;+\infty[$ ، بين أن : $\forall a>0; \quad 2a+\dfrac{1}{a^3}\geq 3$

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	الإشتقـــاق حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 : $f(x)=\dfrac{2x^2+2x-1}{(x+1)^2}$

1

$$Df=\{x\in IR\ /\ x+1\neq 0\}=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$$

2

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2x^2+2x-1}{(x+1)^2}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2x^2+2x-1}{x^2+2x+1}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{2x^2+2x-1}{(x+1)^2}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{2x^2+2x-1}{x^2+2x+1}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

$\lim_{x\mapsto-1} f(x)=\lim_{x\mapsto-1}\dfrac{2x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-\infty$ (**لأن**: $\lim_{x\mapsto-1} 2x^2+2x-1=-1$ و $\lim_{x\mapsto-1}(x+1)^2=0^+$)

3

$$\forall x\in Df\quad f'(x)=\left(\frac{2x^2+2x-1}{(x+1)^2}\right)'=\frac{(4x+2)(x+1)^2-(2x^2+2x-1)\times 2(x+1)}{\left((x+1)^2\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x+1)[(4x+2)(x+1)-2(2x^2+2x-1)]}{(x+1)^4}=\frac{4x^2+4x+2x+2-4x^2-4x+2}{(x+1)^3}$$

$$f'(x)=\frac{2x+4}{(x+1)^3}=\frac{2}{(x+1)^2}\times\frac{x+2}{x+1}$$

4 لدينا : $f(0)=-1$ و $f'(0)=4$ إذن المماس في $x_0=0$ هي: $(\Delta):\ y=4x-1$

5 بما أن

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$x+2$	-	+	+	
$x+1$	-	-	+	
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	$2\nearrow 3$	$3\searrow -\infty$	$-\infty\nearrow 2$	

6 حسب جدول التغيرات فالدالة f تقبل قيمة قصوية نسبية في النقطة $A(-2;3)$

تمرين 2 : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x} & ;\ x>1 \\ f(x)=\sqrt{2-x} & ;\ x\leq 1\end{cases}$

1

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2+1}{2x}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2}{2x}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$$

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty}\sqrt{2-x}=+\infty$$

2 لدينا : $\lim_{\substack{x\mapsto1\\x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\mapsto1\\x>1}}\dfrac{x^2+1}{2x}=1$ و $\lim_{\substack{x\mapsto1\\x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\mapsto1\\x<1}}\sqrt{2-x}=1$ ، إذن f تقبل نهاية في 1

3

$$\lim_{\substack{x\mapsto1\\x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\mapsto1\\x>1}}\frac{\frac{x^2+1}{2x}-1}{x-1}=\lim_{\substack{x\mapsto1\\x>1}}\frac{\frac{x^2-2x+1}{2x}}{x-1}=\lim_{\substack{x\mapsto1\\x>1}}\frac{(x-1)^2}{2x(x-1)}=\lim_{\substack{x\mapsto1\\x>1}}\frac{x-1}{2x}=0$$

$$\lim_{\substack{x \mapsto 1 \\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \mapsto 1 \\ x<1}} \frac{\sqrt{2-x}-1}{x-1} = \lim_{\substack{x \mapsto 1 \\ x<1}} \frac{2-x-1}{(x-1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)} = \lim_{\substack{x \mapsto 1 \\ x<1}} \frac{1-x}{(x-1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}$$

$$\lim_{\substack{x \mapsto 1 \\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \mapsto 1 \\ x<1}} \frac{-1}{\sqrt{2-x}+1} = \frac{-1}{2}$$

إذن f قابلة للاشتقاق يمين ويسار 1 ، ولدينا : $f'_d(1)=0$ و $f'_g(1)=\frac{-1}{2}$

لكنها غير قابلة للاشتقاق في 1 لأن : $f'_d(1) \neq f'_g(1)$

4 معادلة نصفي المماس في النقطة ذات الأفصول 1 : $(\Delta_d): \begin{cases} y=1 \\ x \geq 1 \end{cases}$ و $(\Delta_g): \begin{cases} y=\frac{-1}{2}(x-1)+1=\frac{-1}{2}x+\frac{3}{2} \\ x \leq 1 \end{cases}$

5

$$\begin{cases} f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)' = \frac{1}{2}\frac{2x \times x-(x^2+1)}{x^2} = \frac{1}{2}\frac{x^2-1}{x^2} \quad ; \; x>1 \\ f'(x)=\left(\sqrt{2-x}\right)' = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} \quad ; \; x<1 \end{cases}$$

6 بما أن $x>1 \Rightarrow x^2-1>0$ فإن $\forall x>1 \;\; f'(x)>0$ و لدينا : $\forall x<1 \;\; f'(x)<0$ ، إذن:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

تمرين 3 : $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$

1 $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto +\infty} 2x^3+3x^2-12x+1 = \lim_{x \mapsto +\infty} 2x^3 = +\infty$; $\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto -\infty} 2x^3 = -\infty$

2 $\forall x \in IR \quad f'(x)=6x^2+6x-12=6(x^2+x-2)$

3 إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة الحدودية : x^2+x-2 ،

$\Delta=1+8=9>0$ إذن هذه الحدودية تقبل جذرين مختلفين هما : $r_1=\frac{-1+3}{2}=1$ و $r_2=\frac{-1-3}{2}=-2$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
x^2+x-2	+	-	+	
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	21 ↘	-6 ↗	$+\infty$

4 حسب جدول التغيرات فإن f تقبل قيمة قصوية نسبية في النقطة $A(-2;21)$ و قيمة دنوية نسبية في النقطة $B(1;-6)$ ، لكن هذه النقط لا تمثل قيما مطلقة لأن : $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x \mapsto -\infty} f(x)=-\infty$

تمرين 4 : لنبين أن : $\forall a>0; \;\; 2a+\frac{1}{a^3} \geq 3$ بدراسة الدالة $f(x)=2x+\frac{1}{x^2}$ على $]0;+\infty[$ ،

لدينا: $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{\substack{x \mapsto 0 \\ x>0}} f(x)=+\infty$

و لدينا: $\forall x > 0 \quad f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^3}\left(x^3 - 1\right) = \frac{2}{x^3}(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)$

بما أن : $\frac{2}{x^3}\left(x^2 + x + 1\right) > 0 \quad \forall x > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة الحدانية $x - 1$ ، منه :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	-		+	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

إذن الدالة f تقبل قيمة دنوية مطلقة في النقطة $A(1\,;\,3)$ مما يعني أن : $\forall x > 0; \quad f(x) \geq 3$

أو أيضا : $\forall a > 0; \quad 2a + \frac{1}{a^3} \geq 3$