أكاديمية الجهة الشرقية

تمارين محلولة:الجداء السلمي في المستوى

المستوى : الأولى باك علوم تجريبية

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: نعتبر المتجهات

$\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$ و $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}$ و $\vec{w}=5\vec{i}+3\vec{j}$.

أحسب الجداءات السلمية التالية : $\vec{u}.\vec{v}$ و $\vec{v}.\vec{w}$ و $\vec{u}.\vec{w}$

الجواب : $\vec{u}.\vec{v}=1\times2+2\times(-1)=0$ اذن : $\vec{u}\perp\vec{v}$

$\vec{v}.\vec{w}=2\times5+3\times(-1)=7$ و $\vec{u}.\vec{w}=1\times5+3\times2=11$

تمرين2: حدد قيمة العدد الحقيقي m لكي تكون المتجهتان $\vec{u}(3;-1+m)$ و $\vec{v}(2-m;5)$ متعامدتين

الجواب : $\vec{u}\perp\vec{v}$ يعني $\vec{u}.\vec{v}=0$ يعني $3(2-m)+5\times(-1+m)=0$

$6-3m-5+5m=0$ يعني $2m+1=0$ يعني $m=-\frac{1}{2}$

تمرين3: حدد قيمة العدد الحقيقي m لكي تكون المتجهتان $\vec{u}(-1+m;2)$ و $\vec{v}\left(2-m;\frac{1}{2}\right)$ متعامدتين

الجواب: $\vec{u}\perp\vec{v}$ يعني $\vec{u}.\vec{v}=0$ يعني $(-1+m)(2-m)+2\times\frac{1}{2}=0$

$-2+m+2m-m^2+1=0$ يعني $-m^2+3m-1=0$

يعني $m^2-3m+1=0$ نحسب مميز المعادلة ونجد :

$\Delta=5$ ومنه للمعادلة حلين هما : $m_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ و $m_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

تمرين4: نعتبر في المستوى النقط التالية :

$A(-1;3)$ $B(3;\sqrt{5})$ و $C(2;-3)$ والمتجهة $\vec{u}(\sqrt{5};-2)$

1)أحسب AC و $\|\vec{u}\|$ 2)أحسب : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CB}$

3) ماذا تستنتج بالنسبة للمثلث ABC

الأجوبة :

1) $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(2+1)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(-2)^2}=\sqrt{5+4}=\sqrt{9}=3$

2) $\overrightarrow{AB}\left(3-(-1);\sqrt{5}-3\right)$ يعني $\overrightarrow{AB}\left(4;\sqrt{5}-3\right)$

$\overrightarrow{CB}\left(3-2;\sqrt{5}+3\right)$ يعني $\overrightarrow{CB}\left(1;\sqrt{5}+3\right)$

$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CB}=1\times4+(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3)=4+\left((\sqrt{5})^2-3^2\right)=0$

3)نستنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية في B

تمرين5: نعتبر في المستوى النقط التالية : $A(3;2)$ $B\left(-\frac{1}{2};0\right)$

و $C(-1;-4)$ و $D\left(\frac{5}{2};-2\right)$ و $E(1;-1)$

1)بين أن المثلث ABE قائم الزاوية في النقطة E

2)بين أن الرباعي $ABCD$ معين

(يكفي أن نبين أن $ABCD$ متوازي الأضلاع وضلعين متتابعين متقايسين أو نبين أن القطرين متعامدين)

الأجوبة: 1) يكفي أن نبين أن $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{EB}$ أي نبين أن : $\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{EB}=0$

$\overrightarrow{AE}(-2;-3)$ و $\overrightarrow{EB}\left(-\frac{3}{2};1\right)$

$\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{EB}=3-3=0$ ومنه $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{EB}$ أي ABE قائم الزاوية في النقطة E

2) **طريقة1:** نبين أن $ABCD$ متوازي الأضلاع وضلعين متتابعين متقايسين

لدينا : $\overrightarrow{DC}\left(-\frac{7}{2};-2\right)$ و $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{7}{2};-2\right)$ اذن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

ومنه : $ABCD$ متوازي الأضلاع

ولدينا كذلك : $AC=\sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2+(1-1)^2}=\sqrt{\frac{49}{4}+4}=\sqrt{\frac{65}{4}}$

و $BC=\sqrt{\frac{1}{4}+16}=\sqrt{\frac{65}{4}}$ اذن: $AB=BC$ ومنه : $ABCD$ معين

طريقة2: نبين أن القطرين متعامدين

لدينا : $\overrightarrow{AC}(-4;-6)$ و $\overrightarrow{BD}(3;-2)$

اذن : $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BD}=-12+12=0$

ومنه : $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$ وبالتالي: $ABCD$ معين

تمرين6: نعتبر في المستوى المتجهي المتجهتين التاليتين :

$\vec{u}(-1;-1)$ و $\vec{v}(-2;0)$

1)أحسب : $\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ و $\sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

2)استنتج قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

الأجوبة:

1) $\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}\Leftrightarrow\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=\frac{2}{\sqrt{2}\times2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=\frac{\begin{vmatrix}-1&-2\\-1&0\end{vmatrix}}{\sqrt{2}\times2}\Leftrightarrow\sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=\frac{-2}{\sqrt{2}\times2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2)لدينا $\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$ و $\sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sin\frac{\pi}{4}=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

ومنه $-\frac{\pi}{4}$ هو قياس للزاوية الموجهة $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

تمرين7: نعتبر في المستوى النقط التالية :

$A(3;3)$ و $B(1;1)$ و $C(1;3)$

1)أحسب : $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$ و $\sin(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$

2)استنتج قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$

الأجوبة : 1) $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$

$\overrightarrow{AB}(-2,-2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2,0)$ ومنه : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}=\frac{4}{\sqrt{8}\times\sqrt{4}}=\frac{4}{2\sqrt{2}\times 2}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{-4}{2\sqrt{2}\times 2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -2 & 0\end{vmatrix}}{2\sqrt{2}\times 2}$$

2)لدينا $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$

و $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sin\frac{\pi}{4}=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

ومنه $-\frac{\pi}{4}$ هو قياس للزاوية الموجهة $\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}$

تمرين8: نعتبر في المستوى النقط التالية :

$A(4;1)$ $B(0;5)$ و $C(-2;-1)$

1)أحسب المسافات: AB و AC و BC

ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

2)أحسب : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$

3)استنتج أن : $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}$

4)أحسب $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ و استنتج أن : $\sin\left(\widehat{BAC}\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

الأجوبة:

1) $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}=\sqrt{(-4)^2+(4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$AC=\sqrt{\left(x_C-x_A\right)^2+\left(y_C-y_A\right)^2}=\sqrt{(-6)^2+(-2)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$BC=\sqrt{\left(x_C-x_B\right)^2+\left(y_C-y_B\right)^2}=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

ومنه : $AC=BC$ ومنه ABC متساوي الساقين

2) $\overrightarrow{AB}(-4,4)$ و $\overrightarrow{AC}(-6,-2)$ ومنه : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=24-8=16$

3) $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}=\frac{16}{\sqrt{32}\times\sqrt{40}}=\frac{16}{4\sqrt{2}\times 2\sqrt{10}}=\frac{2}{\sqrt{20}}=\frac{2\sqrt{20}}{20}=\frac{\sqrt{20}}{10}$

4) $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}-4 & -6\\ 4 & -2\end{vmatrix}=32$

$$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{32}{8\sqrt{20}}=\frac{32\sqrt{20}}{160}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\Leftrightarrow \sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{\begin{vmatrix}-4 & -6\\ 4 & -2\end{vmatrix}}{8\sqrt{20}}$$

تمرين9: أعط متجهة منظميه على المستقيم (D) في كل حالة من الحالات التالية :

1) $(D): x-2y+5=0$ 2) $(D): x-1=0$

3) $(D): 2y-3=0$

الأجوبة : متجهة منظمية على المستقيم (D) $ax+by+c=0$

هي : $\vec{n}(a;b)$

1) $(D): x-2y+5=0$ $\vec{n}(2;1)$ متجهة منظميه على (D)

2) $(D): 0x+2y-3=0$ $\vec{n}(-2;0)$ متجهة منظميه على (D)

3) $(D): 1x+0y-1=0$ $\vec{n}(0;1)$ متجهة منظميه على (D)

تمرين10: حدد معادلة المستقيم (D) المار من النقطة $A(1;2)$ و

$\vec{n}(2;-3)$ متجهة منظميه عليه

الجواب: (هناك طريقتين يمكن استعمالهما)

طريقة1: $\overrightarrow{AM}\bullet\vec{n}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\perp\vec{n}\Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$

لدينا $\overrightarrow{AM}(x-1,y-2)$ و $\vec{n}(2;-3)$

$\Leftrightarrow 2(x-1)-3(y-2)=0\Leftrightarrow(D)/2x-3y+4=0$

طريقة2: نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)/ax+by+c=0$ و $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظميه عليه

نعلم أن : $\vec{n}(2;-3)$ متجهة منظميه على (D)

اذن: $a=2;b=-3$ ومنه المعادلة تصبح : $(D)/2x-3y+c=0$

ونعلم أن : $A(1;2)\in(D)$ اذن احداثياته تحقق المعادلة يعني :

$2\times1-3\times2+c=0$ يعني $c=4$ ومنه : $(D)/2x-3y+4=0$

تمرين11: نعتبر في المستوى النقط التالية :

$A(1;2)$ و $B(-2;3)$ و $C(0;4)$

1. حدد معادلة المستقيم (D) واسط القطعة $[AB]$
2. حدد معادلة (Δ) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة A

الجواب: 1) واسط القطعة $[AB]$ هو مستقيم عمودي

على (AB) ويمر من I منتصف القطعة $[AB]$

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)/ax+by+c=0$ و $\overrightarrow{AB}(a,b)$ متجهة منظميه على (D)

ولدينا : $\overrightarrow{AB}(-3,1)$ متجهة منظميه على (D) اذن : $a=-3;b=1$

ومنه المعادلة تصبح : $(D)/-3x+y+c=0$

ونعلم أن : $I\in(D)$ علينا أولا حساب احداثيات I

$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ يعني $I\left(\frac{-1}{2},\frac{5}{2}\right)$

$I\in(D)$ اذن احداثيات I تحقق المعادلة يعني :

$-3\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}+c=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+c=0\Leftrightarrow c=-4$ ومنه : $(D)/-3x+y-4=0$

2) (Δ) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة A

يعني (Δ) عمودي على على (BC) ويمر من A

ومنه : $\overrightarrow{BC}(2,1)$ متجهة منظميه على (Δ)

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)/ax+by+c=0$ و $\overrightarrow{BC}(a,b)$ متجهة منظميه على (Δ)

اذن : $a=2;b=1$ ومنه المعادلة تصبح : $(\Delta)/2x+y+c=0$

ونعلم أن : $A\in(\Delta)$ اذن احداثيات A تحقق المعادلة يعني :

$2\times1+2+c=0\Leftrightarrow c=-4$ ومنه : $(\Delta)/2x+y-4=0$

تمرين12: نعتبر في المستوى النقط التالية :

$A(1;1)$ و $B(-2;0)$ و $C(3;5)$

1. حدد معادلة المستقيم (D) واسط القطعة $[AC]$
2. حدد معادلة (Δ) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة C

الجواب: 1) واسط القطعة $[AC]$ هو مستقيم عمودي

على (AC) ويمر من I منتصف القطعة $[AC]$

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)/ax+by+c=0$ و $\overrightarrow{AC}(a,b)$ متجهة منظميه على (D)

ولدينا : $\overrightarrow{AC}(2,4)$ متجهة منظميه على (D) اذن : $a=2;b=4$

ومنه المعادلة تصبح : $(D)/2x+4y+c=0$

ونعلم أن : $I\in(D)$ علينا أولا حساب احداثيات I

$I\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)$ يعني $I(2,3)$

$I\in(D)$ اذن احداثيات I تحقق المعادلة يعني :

$c=-16 \Leftrightarrow 2\times2+4\times3+c=0$

ومنه : $(D)/2x+4y-16=0$

2) (Δ) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة C

يعني (Δ) عمودي على على (AB) ويمر من C

ومنه : $\overrightarrow{AB}(-3,-1)$ متجهة منظميه على (Δ)

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)/ax+by+c=0$ و $\overrightarrow{AB}(a,b)$ متجهة منظميه على (Δ)

اذن : $a=-3;b=-1$ ومنه المعادلة تصبح : $(\Delta)/-3x-y+c=0$

ونعلم أن : $C\in(\Delta)$ اذن احداثيات C تحقق المعادلة يعني :

$c=14 \Leftrightarrow -9-5+c=0$ ومنه : $(\Delta)/-3x-y+14=0$

<u>تمرين13</u>: نعتبر في المستوى المستقيمين :

$(D):2x+3y-1=0$ و $(D'):\frac{3}{2}x-y+4=0$

هل (D) و (D') متعامدين ؟

<u>الجواب:</u> $\vec{n}(2;3)$ متجهة منظميه على (D)

$\vec{n'}\left(\frac{3}{2};-1\right)$ متجهة منظميه على (D')

$\vec{n}\cdot\vec{n'}=2\times\frac{3}{2}+3\times(-1)=3-3=0$. ومنه $\vec{n}\perp\vec{n'}$

وبالتالي : $(D)\perp(D')$

<u>تمرين14</u>: $(D):x-y+2=0$ و $A(1;4)$ حدد مسافة النقطة A عن المستقيم (D)

<u>الجواب:</u> $d(A;(D))=\frac{|1-4+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

<u>تمرين15</u>: نعتبر في المستوى النقطة: $A(-1;-3)$ و المستقيم (D) الذي معادلته : $x+2y-3=0$

1) أحسب مسافة النقطة A عن المستقيم (D)

2) حدد زوج إحداثيتي النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D)

<u>الجواب:</u> 1) $d(A;(D))=\frac{|-1-6-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$

2) نحدد أولا معادلة ديكارتية للمستقيم (AH):

$\vec{u}(-2,1)$ متجهة موجهة ل (D) $x+2y-3=0$

اذن $\vec{u}(-2,1)$ منظميه على (AH) اذن: $(AH)/-2x+1y+c=0$

ولدينا $A\in(AH)$ اذن : $(-2)\times(-1)-3+c=0$ يعني $c=1$

ومنه : $(AH)/-2x+1y+1=0$

H هي نقطة تقاطع (AH) و (D) اذن احداثيات H هي حلول النظمة :

$\begin{cases}x+2y-3=0\\-2x+y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=3\\-2x+y=-1\end{cases}$ نضرب المعادلة الأولى في $(-2)\times$

ونجد : $\begin{cases}2x+4y=6\\-2x+y=-1\end{cases}\Leftrightarrow$ ونجمع المعادلتين ونجد : $x+2y=3$

$y=1\Leftrightarrow 5y=5\Leftrightarrow 2x+4y-2x+y=6-1\Leftrightarrow$

ومنه : $x+2y=3\Leftrightarrow x+2=3\Leftrightarrow x=1$ ومنه $H(1;1)$

<u>تمرين16</u>: نعتبر في المستوى النقطتين : $A(-1;-3)$ و $B(3;2)$

1) حدد معادلة للمستقيم (AB)

2) أحسب مسافة النقطة O عن المستقيم (AB)

3) استنتج مساحة المثلث OAB

4) حدد زوج إحداثيتي النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (AB)

<u>أجوبة :</u> 1) نحدد أولا معادلة ديكارتية للمستقيم (AB):

$\overrightarrow{AB}(4,5)$ متجهة موجهة ل (AB) $\overrightarrow{AB}(-b,a)$ اذن :

$a=5;b=-4$

ومنه : $(AB)/5x-4y+c=0$

ولدينا $A\in(AB)$ اذن : $5\times(-1)-4\times(-3)+c=0$ يعني $c=-7$

ومنه : $(AB)/5x-4y-7=0$

2) لدينا $O(0,0)$ اذن :

$$d(O;(AB))=\frac{|5\times0-4\times0-7|}{\sqrt{5^2+(-4)^2}}=\frac{|-7|}{\sqrt{41}}=\frac{7}{\sqrt{41}}=\frac{7\sqrt{41}}{41}$$

3) لدينا $d(O;(AB))=OH$ اذن :

$$S_{ABC}=\frac{AB\times OH}{2}=\frac{\sqrt{4^2+(-5)^2}}{2}\times\frac{7}{\sqrt{41}}=\frac{\sqrt{41}}{2}\times\frac{7}{\sqrt{41}}=\frac{7}{2}$$

4) نحدد أولا معادلة ديكارتية للمستقيم (OH):

لدينا $\overrightarrow{AB}(4,5)$ متجهة منظمية على (OH)

اذن: $(OH)/4x+5y+c=0$ و

ولدينا $O\in(OH)$ اذن : $4\times0+5\times0+c=0$ يعني $c=0$

ومنه : $(OH)/4x+5y=0$

H هي نقطة تقاطع (OH) و (AB) اذن احداثيات H هي حلول النظمة :

$\begin{cases}4x+5y=0\\5x-4y=7\end{cases}$ نستعمل طريقة المحددات لحل هذه النظمة :

محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix}4&5\\5&-4\end{vmatrix}=-41\neq0$

و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:هو $x=\frac{\begin{vmatrix}0&5\\7&-4\end{vmatrix}}{-41}=\frac{-35}{-41}=\frac{35}{41}$

$y=\frac{\begin{vmatrix}4&0\\5&7\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{28}{-41}=-\frac{28}{41}$ و منه: $H\left(\frac{35}{41};-\frac{28}{41}\right)$

<u>تمرين17</u>: حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها $A(-1;-3)$ وشعاعها $R=\sqrt{2}$

<u>الجواب :</u> (C) $(x-(-1))^2+(y+3)^2=(\sqrt{2})^2$

يمكننا الاكتفاء بهذه الكتابة

أو النشر فنجد : (C) $x^2+y^2+2x+6y+8=0$

<u>تمرين18</u>: حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(-2;1)$ وتمر من النقطة $A(1;4)$

الجواب : شعاع هذه الدائرة هو : $R=\Omega A$

$$R=\Omega A=\sqrt{(x_A-x_\Omega)^2+(y_A-y_\Omega)^2}=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

ومنه معادلة الدائرة هي: $(C)\ (x-(-2))^2+(y-1)^2=(3\sqrt{2})^2$

يمكننا الاكتفاء بهذه الكتابة

أو النشر فنجد : $(C)\ x^2+y^2+4x-2y-13=0$

وتكتب على الشكل: $x^2+y^2+ax+by+c=0$

تمرين19: حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C)

التي أحد أقطارها $[AB]$ حيث $A(1;3)$ و $B(-1;1)$

الجواب : شعاع هذه الدائرة هو : $R=\frac{AB}{2}$

$$R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}{2}=\frac{\sqrt{4+4}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

مركز الدائرة (C) هو :منتصف القطعة $[AB]$

أي : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ يعني $I(0,2)$

ومنه معادلة الدائرة هي : $(C)\ (x-0)^2+(y-2)^2=(\sqrt{2})^2$

يعني : $(C)\ x^2+y^2-4y+2=0$

تمرين20: حدد تمثيلا بارا متريا للدائرة (C)

التي مركزها $\Omega(1;-2)$ وشعاعها $R=\sqrt{2}$

الجواب : تمثيل بارا متري للدائرة (C) هو :

$$\begin{cases} x=1+\sqrt{2}\cos\theta \\ y=-2+\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}\ (\theta\in\mathbb{R})$$ بارا متري حقيقي

تمرين21: حدد مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي تحقق النظمة

$$\begin{cases} x=3+\sqrt{3}\cos\theta \\ y=1+\sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$$ حيث $(\theta\in\mathbb{R})$

الجواب : $\begin{cases} x=3+\sqrt{3}\cos\theta \\ y=1+\sqrt{3}\sin\theta \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x-3=\sqrt{3}\cos\theta \\ y-1=\sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=(\sqrt{3}\cos\theta)^2+(\sqrt{3}\sin\theta)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=3\left((\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=\sqrt{3}^2$$

ومنه : مجموعة النقط $M(x;y)$ هي الدائرة (C)

التي مركزها $\Omega(3;1)$ وشعاعها $R=\sqrt{3}$

تمرين22: حدد طبيعة (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي تحقق:

1) $(E):\ x^2+y^2-x+3y-4=0$

2) $(E):\ x^2+y^2-6x+2y+10=0$

3) $(E):\ x^2+y^2-4x+5=0$

الأجوبة: 1) $a=-1;b=3;c=-4$

نحسب : $a^2+b^2-4c=(-1)^2+3^2-4\times(-4)=1+9+16=26>0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ أي : $\Omega(\frac{1}{2};\frac{-3}{2})$

وشعاعها : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$

2) $a=-6;b=2;c=10$

نحسب : $a^2+b^2-4c=(-6)^2+2^2-4\times(10)=36+4-40=0$

ومنه: (E) هي عبارة عن النقطة : $\Omega(3;-1)$

3) $a=-4;b=0;c=5$

نحسب : $a^2+b^2-4c=16-20=-4<0$

ومنه: (E) هي المجموعة الفارغة

تمرين23: حدد طبيعة (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي تحقق: $(E):\ x^2+y^2+5x-3y+\frac{11}{2}=0$

الجواب : $a=5;b=-3;c=\frac{11}{2}$

نحسب : $a^2+b^2-4c=5^2+(-3)^2-4\times\left(\frac{11}{2}\right)=25+9-22=12>0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ أي : $\Omega(-\frac{5}{2};\frac{3}{2})$

وشعاعها : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{12}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

تمرين24: حدد طبيعة (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي تحقق:

1. $(E)\ x^2+y^2-1=0$
2. $(E)\ x^2+y^2-2x-6y+6=0$
3. $(E)\ x^2+y^2-4x-2y+7=0$
4. $(E)\ x^2+y^2+8y+12=0$

الأجوبة : 1) $x^2+y^2=1\Leftrightarrow x^2+y^2-1=0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $O(0;0)$ وشعاعها : $R=1$

2) $x^2-2x+1+y^2-2\times y+3^2-3^2-1+6=0\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-6y+6=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=4=(2)^2$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(1;3)$ وشعاعها : $R=2$

3) $x^2-4x+4+y^2-2\times y+1-1-4+7=0\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-2y+7=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=-2$

ومنه : (E) هي المجموعة الفارغة

4) $(x-0)^2+y^2+2\times4\times y+4^2-4^2+12=0\Leftrightarrow x^2+y^2+8y+12=0$

$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y+4)^2=4=(2)^2$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(0;-4)$ وشعاعها : $R=2$

تمرين25: حل مبيانيا المتراجحتين التاليتين :

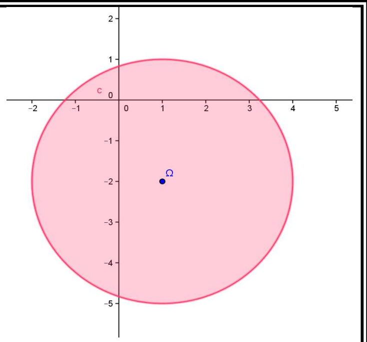
1) $x^2+y^2-2x+4y-4<0$ 2) $x^2+y^2-1>0$

الأجوبة : 1)

$x^2-2x+1-1+y^2+4\times y+4-4-4<0\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+4y-4<0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2<9=(3)^2$

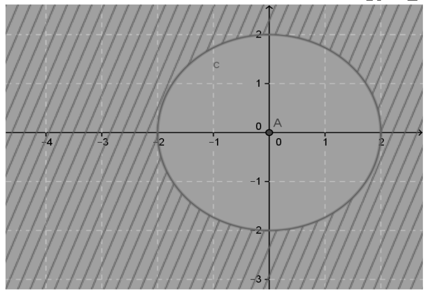
ومنه : (E) هو داخل الدائرة التي مركزها $\Omega(1;-2)$ وشعاعها : $R=3$



2) $(x-0)^2+(y-0)^2>2^2 \Leftrightarrow x^2+y^2>4 \Leftrightarrow x^2+y^2-4>0$

ومنه : (E) هو خارج الدائرة التي مركزها $O(0;0)$ وشعاعها :

$R=2$



تمرين26:حل مبيانيا النظمة التالية:

$$\begin{cases} x^2+y^2-1>0 \\ x^2+y^2-4x-12<0 \end{cases}$$

الجواب :

أ) $x^2-4x+4-4+y^2-12<0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-12<0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-0)^2<16=(4)^2$

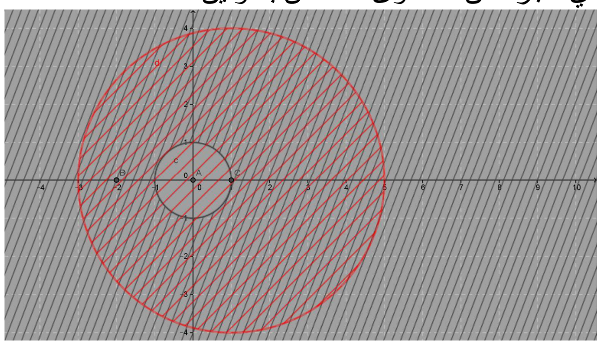
وهذا يعني داخل الدائرة التي مركزها $\Omega(2;0)$ وشعاعها : $R=4$

ب) $(x-0)^2+(y-0)^2>1^2 \Leftrightarrow x^2+y^2>1 \Leftrightarrow x^2+y^2-1>0$

يعني خارج الدائرة التي مركزها $O(0;0)$ وشعاعها : $R=1$

مجموعة حلول النظمة (E) هي أزواج احداثيات نقط المستوى التي تنتمي الى تقاطع داخل الدائرة التي مركزها $\Omega(2;0)$ وشعاعها : $R=4$ و خارج الدائرة التي مركزها $O(0;0)$ وشعاعها : $R=1$

أي الجزء من المستوى المخدش باللونين معا



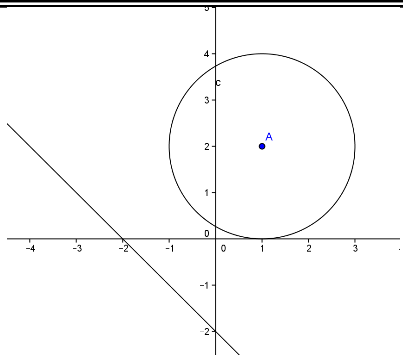
تمرين27: أدرس الوضع النسبي للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;2)$ وشعاعها $R=2$ مع المستقيم (D) الذي معادلته :

$(D):\ x+y+2=0$

الجواب: نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$$d(\Omega,(P))=\frac{|1+2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|5|}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>R=2$$

ومنه : المستقيم (D) لا يقطع الدائرة (C)



تمرين28: نعتبر الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;2)$ وشعاعها $R=2$ و المستقيم (D) الذي معادلته :

$(D):\ x-y+2=0$

1)بين أن المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

2) حدد احداثيات نقط تقاطع الدائرة (C) و المستقيم (D)

الجواب: 1)نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$$d(\Omega,(P))=\frac{|1-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<R=2$$

ومنه : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

2)معادلة الدائرة هي : $(x-1)^2+(y-2)^2=(2)^2$

نحل اذن النظمة التالية :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ (x-1)^2+(y-2)^2=(2)^2 \\ (2)\ x-y+2=0 \end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow x+2=y$ نعوض في المعادلة (1) $x+2=y$ فنجد :

$(1)\ (x-1)^2+(x+2-2)^2=(2)^2$ يعني : $(x-1)^2+(x)^2=4$

يعني : $x^2-2x+1+x^2=4$ يعني : $2x^2-2x-3=0$

نحسب مميز المعادلة فنجد: $\Delta=28$ ومنه للمعادلة حلين هما :

$x_1=\frac{2+2\sqrt{7}}{4}$ و $x_2=\frac{2-2\sqrt{7}}{4}$ يعني : $x_1=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ و $x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$

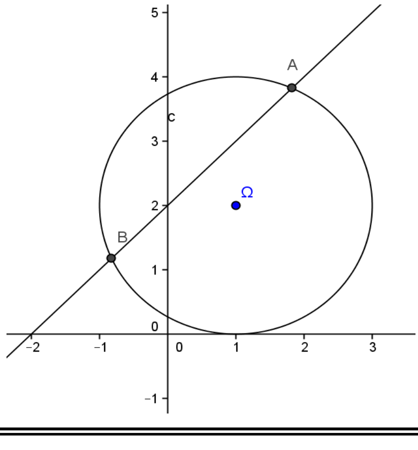
اذا كانت $x_1=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ نعوض في $x+2=y$

فنجد : $y=\frac{1+\sqrt{7}}{2}+2=\frac{5+\sqrt{7}}{2}$

اذا كانت $x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$ نعوض في $x+2=y$

فنجد : $y=\frac{1-\sqrt{7}}{2}+2=\frac{5-\sqrt{7}}{2}$

ومنه نقطتا التقاطع هما : $A\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2};\frac{5+\sqrt{7}}{2}\right)$ و $B\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2};\frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$



تمرين29: نعتبر للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;2)$ وشعاعها $R=1$ و المستقيم (D) الذي معادلته :

1) بين أن المستقيم (D) مماس للدائرة (C)

2) حدد احداثيات نقطة التماس T

الجواب: 1)نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$(D):\ 0x+1y-3=0$ **يعني** $(D):\ y=3$

$$d(\Omega,(P))=\frac{|0+2-3|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{1}}=1=R$$

ومنه : المستقيم (D) مماس للدائرة (C)

2)معادلة الدائرة هي : $(x-1)^2+(y-2)^2=1^2$

نحل اذن النظمة التالية :

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(1)(x-1)^2+(y-2)^2=1\\(2)\ y=3\end{cases}$$

نعوض في المعادلة (1) $y=3$ فنجد :

$(1)(x-1)^2+1=1$ يعني : $(x-1)^2=0$ يعني : $x=1$

ومنه نقطة التماس هي : $T(1;3)$

تمرين30: نعتبر الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(2;1)$ وشعاعها $R=5$ و المستقيم (D) الذي معادلته :

$(D):\ 3x+y-2=0$

1)بين أن المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

2) حدد احداثيات نقط تقاطع الدائرة (C) و المستقيم (D)

الجواب:1) نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$$d(\Omega,(P))=\frac{|6+1-2|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|5|}{\sqrt{10}}=\frac{5\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{2}<R=5$$

ومنه : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

2)معادلة الدائرة هي : $(x-2)^2+(y-1)^2=(5)^2$ تكافئ:

$x^2+y^2-4x-2y-20=0$

نحدد احداثيات نقط تقاطع الدائرة (C) و المستقيم (D)

نحل اذن النظمة التالية :

$$\begin{cases}(1)\ x^2+y^2-4x-2y-20=0\\(2)\ 3x+y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1)\ x^2-x-2=0\\(2)\ y=-3x+2\end{cases}$$

نحسب مميز المعادلة (1) فنجد: $\Delta=9$ ومنه للمعادلة

حلين هما : $x_1=\frac{1+3}{2}=2$ و $x_2=-1$

- اذا كانت $x_1=2$ فان : $y=-4$
- اذا كانت $x_1=-1$ فان : $y=5$

ومه نقطتا التقاطع هما : $A(-1;5)$ و $A(2;-4)$

تمرين31: نعتبر الدائرة (C) التي معادلتها : $(1)\ x^2+y^2-2x-8y+1=0$

و المستقيم (D) المعرف بتمثيله البارامتري : $(D):\begin{cases}x=1+2t\\y=t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$:

1)بين أن المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

2) حدد احداثيات نقط تقاطع الدائرة (C) و المستقيم (D)

الجواب :1: نعوض في المعادلة (1) فنجد :

$(1+2t)^2+t^2-2(1+2t)-8t+1=0$ يعني : $5t^2-8t=0$

يعني: $t(5t-8)=0$

يعني : $t_1=0$ أو $t_2=\frac{8}{5}$

ومنه : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

2)اذا كانت $t_1=0$ نعوض في $\begin{cases}x=1+2t\\y=t\end{cases}$ فنجد $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$:

اذا كانت $t_2=\frac{8}{5}$ نعوض فنجد $\begin{cases}x=\frac{21}{5}\\y=\frac{8}{5}\end{cases}$

ومنه : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

و نقطتا التقاطع هما : $A(1;0)$ و $B\left(\frac{21}{5};\frac{8}{5}\right)$

تمرين32: لتكن (C) الدائرة التي معادلتها الديكارتية هي :

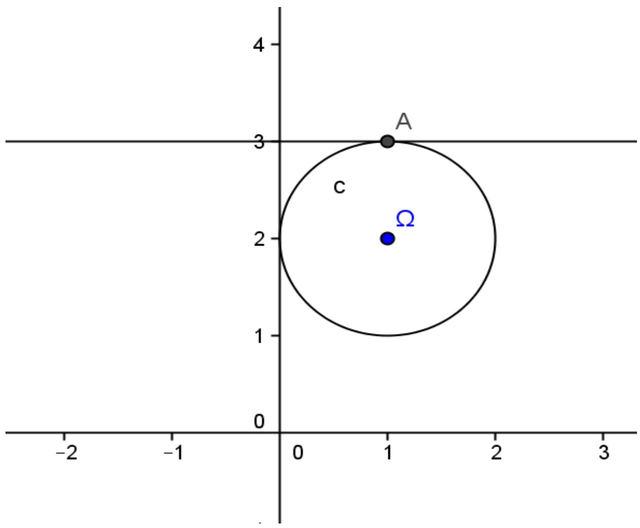
$(1)\ x^2+y^2-4x-2y+1=0$

1) تأكد أن $A(0;1)\in(C)$ ثم حدد مركز وشعاع الدائرة (C)

2) معادلة لمماس للدائرة (C) في النقطة A

الجواب : 1) نتحقق أن احداثيات $A(0;1)$ تحقق المعادلة (1)

$0^2+1^2-4\times0-2\times1+1=0$ (1) ومنه $A(0;1)\in(C)$



$a=4;b=-2;c=1$

نحسب : $a^2+b^2-4c=(4)^2+(-2)^2-4\times1=16+4-4=16>0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ أي : $\Omega(-2;1)$

وشعاعها : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{16}}{2}=2$

2) معادلة لمماس للدائرة (C) في النقطة A ؟؟؟؟

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Omega}=0\Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$ ولدينا : $\overrightarrow{AM}(x-0;y-1)$ و $\overrightarrow{A\Omega}(-2;0)$

$-2(x-0)=0\Leftrightarrow-2(x-0)+0(y-1)=0\Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$

$x=0\Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$

ومنه معادلة مماس الدائرة (C) في النقطة $A(0;1)$ هو المستقيم الذي معادلته : $(D):x=0$

تمرين33: لتكن (C) الدائرة التي معادلتها الديكارتية هي :

$$x^2+y^2+4x+4y-2=0$$

و المستقيم (D) الذي معادلته : $x+3y-2=0$

1) حدد مركز وشعاع الدائرة (C)

2) بين أن المستقيم (D) مماس للدائرة (C)

3) حدد إحداثيتي نقطه تماس الدائرة (C) و المستقيم (D)

الجواب: 1) نحدد مركز وشعاع الدائرة (C)

$$a=4;b=4;c=-2$$

نحسب : $a^2+b^2-4c=(4)^2+(4)^2-4\times-2=16+16+8=40>0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ أي : $\Omega(-2;-2)$

وشعاعها : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{40}}{2}=\sqrt{10}$

2) نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$$d(\Omega,(P))=\frac{|-2-6-2|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}=R$$

ومنه : المستقيم (D) مماس للدائرة (C)

3) نحدد احداثيات نقطة التماس T

معادلة الدائرة هي : $(x+2)^2+(y+2)^2=10$

نحل اذن النظمة التالية :

$$\begin{cases}(1)\ (x+2)^2+(y+2)^2=10\\(2)\ x+3y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1)\ (x+2)^2+(y+2)^2=10\\(2)\ x=2-3y\end{cases}$$

نعوض في المعادلة (1) $x=2-3y$ فنجد : $y^2-2y+1=0$

يعني : $(y-1)^2=0$ يعني : $y=1$ ومنه : $x=-1$

ومنه نقطة التماس هي : $T(-1;1)$

« c’est en forgeant que l’on devient forgeron » dit un proverbe.
c’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien