

سلسلة 1	تحليلية الجداء السلمي	السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية
		<p><b>تمرين 1 :</b> المستوى (P) منسوب إلى م.م.م <math>(O, \vec{i}, \vec{j})</math>  نعتبر النقط: <math>A(-1,1)</math> و <math>B(-1,3)</math> و <math>C(-4,4)</math> و <math>D(1,1)</math> و <math>E(-4,-2)</math>  1) أحسب: <math>\overline{AB} \cdot \overline{AD}</math> و <math>\overline{BC} \cdot \overline{DE}</math>، ماذا تستنتج؟  2) بين أن: <math>(BE) \perp (CD)</math>  3) بين أن: <math>(AM) \perp (BC)</math> حيث M منتصف <math>[DE]</math></p>
		<p><b>تمرين 2 :</b> المستوى (P) منسوب إلى م.م.م <math>(O, \vec{i}, \vec{j})</math>  نعتبر النقط: <math>A(1; 1)</math> و <math>B(1; 3)</math> و <math>C(-1; 1)</math> و <math>D(0; 1+\sqrt{3})</math>  1) بين أن <math>ABC</math> مثلث قائم الزاوية في A  2) أ) أحسب: <math>\ \overline{CA}\ </math> و <math>\ \overline{CB}\ </math> و <math>\ \overline{CD}\ </math>  ب) أحسب: <math>\overline{CA} \cdot \overline{CD}</math> و <math>\overline{CA} \cdot \overline{CB}</math>  3) أ) أحسب: <math>\cos(\overline{CA}, \overline{CB})</math> و <math>\sin(\overline{CA}, \overline{CB})</math> و <math>\cos(\overline{CA}, \overline{CD})</math> و <math>\sin(\overline{CA}, \overline{CD})</math>  ب) استنتج قياسي الزاويتين: <math>(\overline{CA}, \overline{CB})</math> و <math>(\overline{CA}, \overline{CD})</math>  4) تحقق أن: <math>(\overline{CB}, \overline{CD}) = \frac{\pi}{12}</math>  5) استنتج حساب: <math>\cos \frac{\pi}{12}</math> و <math>\sin \frac{\pi}{12}</math></p>
		<p><b>تمرين 3 :</b> المستوى (P) منسوب إلى م.م.م <math>(O, \vec{i}, \vec{j})</math>  نعتبر النقط: <math>A(2,2)</math> و <math>B(-1,1)</math> و <math>C(0,-1)</math>  1) أنشئ النقط A و B و C  2) أ) أوجد معادلة المستقيم <math>(\Delta)</math> المار من B والعمودي على <math>(AC)</math>.  ب) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم <math>(AC)</math>  ج) حدد زوج إحداثيتي H نقطة تقاطع <math>(\Delta)</math> و <math>(AC)</math>  3) احسب <math>\cos(\overline{CA}, \overline{CB})</math>  4) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم <math>(L)</math> واسط القطعة <math>[AB]</math></p>
		<p><b>تمرين 4 :</b> المستوى (P) منسوب إلى م.م.م <math>(O, \vec{i}, \vec{j})</math>  نعتبر النقط: <math>A(1, 2\sqrt{3})</math> و <math>B(0, \sqrt{3})</math> و <math>C(1, 0)</math>  1) بين أن <math>ABC</math> متساوي الساقين في النقطة B  2) أحسب: <math>\cos(\overline{BA}, \overline{BC})</math> و <math>\tan(\overline{BA}, \overline{BC})</math>  3) حدد معادلة ديكارتية للارتفاع المنشأ من النقطة B للمثلث <math>ABC</math>  4) حدد معادلة ديكارتية للمتوسط المار من النقطة C للمثلث <math>ABC</math>  5) حدد إحداثيتي G مركز ثقل المثلث <math>ABC</math>  6) احسب مساحة المثلث <math>ABC</math>  7) أ) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم <math>(BC)</math>  ب) احسب مسافة A عن المستقيم <math>(BC)</math></p>

سلسلة 1	تحليلية الجداء السلمي حلول مقترحة	السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية
<b>تمرين 1:</b> $A(-1,1)$ و $B(-1,3)$ و $C(-4,4)$ و $D(1,1)$ و $E(-4,-2)$		
	<p>لدينا <math>\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)</math> و <math>\overrightarrow{AD}(x_D - x_A; y_D - y_A)</math></p> <p><math>\overrightarrow{AB}(0; 2)</math> و <math>\overrightarrow{AD}(2; 0)</math></p> <p>منه: <math>\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \times 2 + 0 \times 2 = 0 + 0 = 0</math></p> <p>نستنتج إذن أن: <math>(AB) \perp (AD)</math></p> <p>وأيضا: <math>\overrightarrow{DE}(x_E - x_D; y_E - y_D)</math> و <math>\overrightarrow{BC}(x_C - x_B; y_C - y_B)</math></p> <p><math>\overrightarrow{DE}(-5; -3)</math> و <math>\overrightarrow{BC}(-3; 1)</math></p> <p>منه: <math>\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DE} = (-3) \times (-5) + 1 \times (-3) = 15 + (-3) = 12</math></p>	1
	<p>لدينا: <math>\overrightarrow{BE}(x_E - x_B; y_E - y_B)</math> و <math>\overrightarrow{CD}(x_D - x_C; y_D - y_C)</math></p> <p><math>\overrightarrow{BE}(-3; -5)</math> و <math>\overrightarrow{CD}(5; -3)</math></p> <p>منه: <math>\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CD} = -3 \times 5 + (-5) \times (-3) = -15 + 15 = 0</math> بالتالي: <math>(BE) \perp (CD)</math></p>	2
	<p>لدينا <math>M</math> منتصف <math>[DE]</math> إذن:</p> $\begin{cases} x_M = \frac{x_D + x_E}{2} = \frac{-3}{2} \\ y_M = \frac{y_D + y_E}{2} = \frac{-1}{2} \end{cases}$ <p>إذن: <math>\overrightarrow{AM}(x_M - x_A; y_M - y_A)</math> و <math>\overrightarrow{BC}(x_C - x_B; y_C - y_B)</math></p> <p><math>\overrightarrow{AM}\left(\frac{-1}{2}; \frac{-3}{2}\right)</math> و <math>\overrightarrow{BC}(-3; 1)</math></p> <p>منه: <math>\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = -3 \times \left(\frac{-1}{2}\right) + 1 \times \left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0</math> بالتالي: <math>(AM) \perp (BC)</math></p>	3
🌱 لإثبات التعامد نبرهن أن الجداء السلمي منعدم.		
<b>تمرين 2:</b> $A(1; 1)$ و $B(1; 3)$ و $C(-1; 1)$ و $D(0; 1 + \sqrt{3})$		
	<p>لدينا <math>\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)</math> و <math>\overrightarrow{AC}(x_C - x_A; y_C - y_A)</math></p> <p><math>\overrightarrow{AB}(0; 2)</math> و <math>\overrightarrow{AC}(-2; 0)</math></p> <p>منه: <math>\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \times (-2) + 0 \times 2 = 0 + 0 = 0</math></p> <p>نستنتج إذن أن: <math>(AB) \perp (AC)</math> بالتالي <math>ABC</math> مثلث قائم الزاوية في <math>A</math></p>	1
	<p>لدينا <math>\overrightarrow{CA}(x_D - x_C; y_D - y_C)</math> و <math>\overrightarrow{CB}(x_B - x_C; y_B - y_C)</math></p> <p><math>\overrightarrow{CA}(2; 0)</math> و <math>\overrightarrow{CB}(2; 2)</math></p> <p>إذن: <math>\ \overrightarrow{CA}\  = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2</math> و <math>\ \overrightarrow{CB}\  = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}</math></p> <p>و <math>\ \overrightarrow{CD}\  = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2</math></p>	2
	<p><math>\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = 2 \times 1 + 0 \times \sqrt{3} = 2</math> و <math>\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 2 \times 2 + 0 \times 2 = 4</math> (ب)</p>	
	<p><math>\sin(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\det(\overrightarrow{CACB})}{\ \overrightarrow{CA}\  \ \overrightarrow{CB}\ } = \frac{\begin{vmatrix} 2 &amp; 0 \\ 2 &amp; 2 \end{vmatrix}}{2 \times 2\sqrt{2}} = \frac{4 - 0}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}</math> و <math>\cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\ \overrightarrow{CA}\  \ \overrightarrow{CB}\ } = \frac{4}{2 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}</math> (أ)</p>	3

$$\sin(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})}{\|\overrightarrow{CA}\| \|\overrightarrow{CD}\|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}}{2 \times 2} = \frac{2\sqrt{3} - 0}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CA}\| \|\overrightarrow{CD}\|} = \frac{2}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

بما أن:  $\cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  و  $\sin(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  فإن:  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

و بما أن:  $\cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}$  و  $\sin(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  فإن:  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

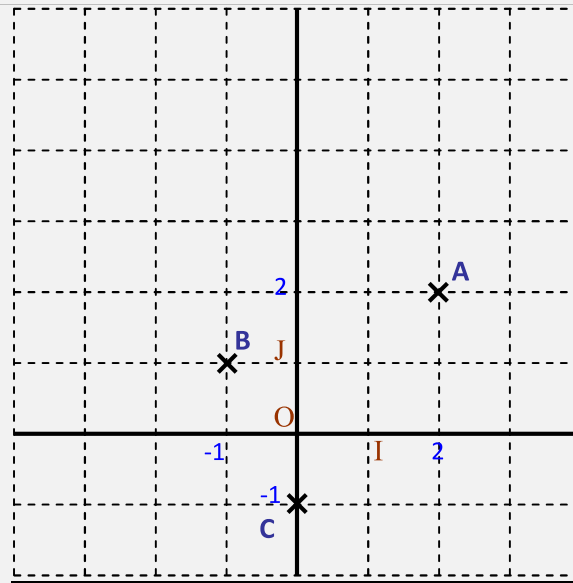
لدينا:  $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = -(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12} [2\pi]$  4

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CB}\| \|\overrightarrow{CD}\|} = \frac{2 \times 1 + 2 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{2} \times 2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{3}) \times \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\det(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})}{\|\overrightarrow{CB}\| \|\overrightarrow{CD}\|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}}{2\sqrt{2} \times 2} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} - 1) \times \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

يمكن تحديد قياس زاوية وذلك بحساب جيبتها وجيب تمامها.

**تمرين 3:**  $A(2,2)$  و  $B(-1,1)$  و  $C(0,-1)$



لنحدد معادلة المستقيم  $(\Delta)$  المار من  $B$  والعمودي على  $(AC)$ .

لتكن  $M(x, y)$  نقطة من المستوى، لدينا:  $\overrightarrow{BM}(x+1; y-1)$  و  $\overrightarrow{AC}(-2; -3)$

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -2(x+1) - 3(y-1) = 0 \Leftrightarrow -2x - 2 - 3y + 3 = 0 \Leftrightarrow -2x - 3y + 1 = 0$$

بالتالي:  $(\Delta): -2x - 3y + 1 = 0$  أو أيضا:  $(\Delta): 2x + 3y - 1 = 0$

لنحدد حد معادلة ديكارتية للمستقيم  $(AC)$

لتكن  $M(x, y)$  نقطة من المستوى، لدينا:  $\overrightarrow{AM}(x-2; y-2)$  و  $\overrightarrow{AC}(-2; -3)$

$$M \in (AC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3(x-2) + 2(y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 6 + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow -3x + 2y + 2 = 0$$

بالتالي:  $(AC): -3x + 2y + 2 = 0$  أو أيضا:  $(AC): 3x - 2y - 2 = 0$

حدد زوج إحداثيات  $H$  نقطة تقاطع  $(\Delta)$  و  $(AC)$

إذن لنحل النظام المكونة من معادلتين  $(\Delta)$  و  $(AC)$ ، أي:

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x-2y=2 \end{cases}$$

(ج) لدينا المحددة هي:  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 9 = -13$  و  $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 6 = -8$

و  $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$  ، منه:  $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{8}{13}$  و  $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-1}{13}$  بالتالي:  $H\left(\frac{8}{13}; \frac{-1}{13}\right)$

لدينا:  $\vec{CA}(2; 3)$  و  $\vec{CB}(-1; 2)$  إذن:  $\|\vec{CA}\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$  و  $\|\vec{CB}\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$$\cos(\vec{CA}, \vec{CB}) = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{\|\vec{CA}\| \|\vec{CB}\|} = \frac{-2+6}{\sqrt{13} \times \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}} = \frac{4\sqrt{65}}{65}$$

لنحدد معادلة ديكارتية للمستقيم  $(L)$  واسط القطعة  $[AB]$

نعتبر  $K$  منتصف  $[AB]$ ، إذن:  $K\left(\frac{2+(-1)}{2}; \frac{2+1}{2}\right)$  أي:  $K\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

لتكن  $M(x, y)$  نقطة من المستوى. لدينا:  $\vec{AB}(-3; -1)$  و  $\vec{KM}\left(x - \frac{1}{2}; y - \frac{3}{2}\right)$

$$M \in (L) \Leftrightarrow \vec{KM} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow -3\left(x - \frac{1}{2}\right) - \left(y - \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -3x + \frac{3}{2} - y + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow -3x - y + 3 = 0$$

بالتالي:  $(L): 3x + y - 3 = 0$

لايجاد إحداثيات نقطة تقاطع مستقيمين نحل النظام المكونة من معادلتيهما الديكارتيتين  
لايجاد معادلة ديكارتية لواسط قطعة نحدد أولاً إحداثيات منتصف هذه القطعة فيكون الواسط مستقيماً ماراً بهذه النقطة و تكون المتجهة التي طرفاها هما طرفي القطعة منظمية عليه...  
يستحسن جعل معامل  $x$  موجبا في معادلة مستقيم وذلك بضرب جميع المعاملات في  $-1$

**تمرين 4:**  $A(1, 2\sqrt{3})$  و  $B(0, \sqrt{3})$  و  $C(1, 0)$

لدينا:  $\vec{BA}(1; \sqrt{3})$  و  $\vec{BC}(1; -\sqrt{3})$  إذن:  $\|\vec{BA}\| = \sqrt{1+3} = 2$  و  $\|\vec{BC}\| = \sqrt{1+3} = 2$

بالتالي:  $ABC$  متساوي الساقين في النقطة  $B$

$$\sin(\vec{BA}, \vec{BC}) = \frac{\det(\vec{BA}, \vec{BC})}{\|\vec{BA}\| \|\vec{BC}\|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \end{vmatrix}}{2 \times 2} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\vec{BA}, \vec{BC}) = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BA}\| \|\vec{BC}\|} = \frac{1-3}{2 \times 2} = \frac{-1}{2}$$

$$\tan(\vec{BA}, \vec{BC}) = \frac{\sin(\vec{BA}, \vec{BC})}{\cos(\vec{BA}, \vec{BC})} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{-1} = \sqrt{3}$$

ليكن  $(\Delta)$  الارتفاع المنشأ من النقطة  $B$  للمثلث  $ABC$

إذن  $(\Delta)$  يمر من  $B$  و عمودي على  $(AC)$

لتكن  $M(x, y)$  نقطة من المستوى. لدينا:  $\vec{AC}(0; -2\sqrt{3})$  و  $\vec{BM}(x; y - \sqrt{3})$

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \vec{BM} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow 0 \times x - 2\sqrt{3}(y - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{3}(y - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow y - \sqrt{3} = 0$$

بالتالي:  $(\Delta): y - \sqrt{3} = 0$

ليكن  $E$  منتصف  $[AB]$ ، إذن المتوسط المار من النقطة  $C$  للمثلث  $ABC$  هو المستقيم  $(EC)$

لنحدد إذن لنحدد حد معادلة ديكارتية للمستقيم  $(EC)$ ، لدينا:  $E\left(\frac{1}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

لتكن  $M(x, y)$  نقطة من المستوى، لدينا:  $\overrightarrow{CM}(x-1; y)$  و  $\overrightarrow{EC}\left(\frac{1}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$$M \in (EC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{EC}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y \\ \frac{1}{2} & -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\frac{3\sqrt{3}}{2}(x-1) + \frac{1}{2}y = 0$$

$$\Leftrightarrow -3\sqrt{3}(x-1) + y = 0 \Leftrightarrow -3\sqrt{3}x + y - 3\sqrt{3} = 0$$

$$\boxed{(EC): 3\sqrt{3}x - y + 3\sqrt{3} = 0} \text{ : بالتالي}$$

5 لنحدد إحداثياتي  $G$  مركز ثقل المثلث  $ABC$ ، نعلم أن:  $G\left(\frac{2}{3}; \sqrt{3}\right)$  منه: 
$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \sqrt{3} \end{cases}$$

6 مساحة المثلث  $ABC$  هي:  $S_{ABC} = \frac{|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|}{2}$  ولدينا:  $\overrightarrow{AC}(0; -2\sqrt{3})$  و  $\overrightarrow{AB}(-1; -\sqrt{3})$

$$\boxed{S_{ABC} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & -2\sqrt{3} \end{vmatrix}}{2} = \frac{|2\sqrt{3}|}{2} = \sqrt{3}} \text{ : منه}$$

لنحدد معادلة ديكارتية للمستقيم  $(BC)$ ، لتكن  $M(x, y)$  نقطة من المستوى.

لدينا:  $\overrightarrow{CM}(x-1; y)$  و  $\overrightarrow{BC}(1; -\sqrt{3})$

$$M \in (BC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{BC}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y \\ 1 & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}(x-1) - y = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}x - y + \sqrt{3} = 0 \quad (أ)$$

$$\boxed{(BC): \sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0} \text{ : بالتالي}$$

$$\boxed{d(A; (BC)) = \frac{|\sqrt{3}x_A + y_A - \sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{|\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \sqrt{3}|}{2} = \sqrt{3}} \text{ (ب)}$$

للتذكير ارتفاع مثلث هو مستقيم يمر من أحد رؤوسه وعمودي على حامل الضلع المقابل لهذا الرأس، أما المتوسط فهو مستقيم يمر من أحد رؤوسه ومنتصف الضلع المقابل لهذا الرأس.