في هذه التمارين نعتبر الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

01

نعتبر النقط $A(1;1;0)$ و $B(2;0;-1)$ و $C(0;3;-1)$ و $D(-1;4;0)$.

1. أعط معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).
2. بين أن : $x-4y+5z+3=0$ هي معادلة للمستوى (Q) الذي يتضمن المستقيم (AB) و العمودي على المستوى (ABC) .
3. أوجد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من النقطة $\Omega(-2;0;3)$ و العمودي على (Q).
4. أكتب معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها Ω و المماسة للمستوى (ABC).
5. أدرس تقاطع الفلكة (S) و المستقيم (CD) .

02

نعتبر الفلكة (S) المعرفة بالمعادلة : $x^2+y^2+z^2-2x+2z=0$.

1. حدد المركز Ω و الشعاع R للفلكة (S).
2. بين أن المستقيم (D) المعرف ب $\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \lambda\in\mathbb{R}$ يقطع الفلكة (S) في نقطتين A و B يتم تحديد إحداثيتيهما. (A أفصولها 0)
3. بين أن المستوى (P) المعادلة : $x+y+1=0$ مماس للفلكة (S) في النقطة A.
4. أكتب معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المماس ل للفلكة (S) في النقطة B.

أثبت أن: (P) و (Q) يتقطعان وفق مستقيم (Δ) عمودي على المستوى $A\ \Omega\ B$.

03

نعتبر النقط $A(1;2;-1)$ و $B(-3;-2;3)$ و $C(0;-2;-3)$.

1. بين أن النقط A و B و C غير مستقيمية .
2. بين أن المتجهة $\vec{n}(2,-1,1)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC) .
3. لنعتبر (P) المستوى حيث معادلة ديكارتية له هي $x+y-z+2=0$. بين أن المستويين (ABC) و (P) متعامدين .
4. نعتبر G مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;-1)$ و $(C;2)$.
   - أ. بين أن إحداثيات النقطة G هي $(2;0;-5)$.
   - ب. بين أن المستقيم (CG) عمودي على المستوى (P) .
   - ج. حدد إحداثيات النقطة H تقاطع المستقيم (CG) و المستوى (P) .
5. بين أن : المجموعة (S) للنقط M من الفضاء التي تحقق $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=12$ هي فلكة محددا مركزها و شعاعها .
6. حدد طبيعة و العناصر المميزة لتقاطع المستوى (P) و الفلكة (S) .

MERYEM LOULIDI

تصحيح سلسلة الفضاء في السلمي الجداء

تمرين:1

1- معادلة ديكارتية للمستوى:

$$M(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y-1 & -1 & 2 \\ z & -1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1)-(-2)(y-1)+z=0$$

$$\Leftrightarrow 3x+2y+z-5=0$$

خلاصة: معادلة ديكارتية للمستوى هي:

$$(ABC):3x+2y+z-5=0$$

2- لنبين أن x-4y+5z+3=0 هي معادلة (Q)

الذي يتضمن المستقيم(AB) و العمودي على

:(ABC)

لدينا المستوى (Q) يتضمن المستقيم (AB)

إذن $\overrightarrow{AB}$ موجهة ل (Q) و لدينا $\vec{n}(3,2,1)$ منظمية على (ABC) و بما أن المستوى (Q) عمودي على(ABC)

فإن $\vec{n}$ موجهة للمستوى(Q) و بالتالي المستوى

(Q) موجه ب $\vec{n}(3,2,1)$ و $\overrightarrow{AB}(1,-1,-1)$ و منه:

$$M(x,y,z)\in(Q)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\vec{n}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 3 \\ y-1 & -1 & 2 \\ z & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)-4(y-1)+5z=0$$
$$\Leftrightarrow x-1-4y+4+5z=0$$
$$\Leftrightarrow x-4y+5z+3=0$$

خلاصة: (Q):x-4y+5z+3=0

3- تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) :

لدينا المستقيم (Δ) عمودي على المستوى(Q) و

لدينا $\vec{n}(1,-4,5)$ منظمية على المستوى(Q) إذن $\vec{n}$

متجهة موجهة للمستقيم (Δ) :

و لدينا $\Omega(-2,0,3)$ منهو التمثيل البارامتري

للمستقيم (Δ) كالتالي:

$$(\Delta)\begin{cases} x=-2+t \\ y=-4t \\ z=3+5t \end{cases}$$

4- معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها Ω و

المماسة للمستوى (ABC) لنحدد المسافة

$d(\Omega,(ABC))$:

$$d(\Omega,(ABC))=\frac{|3\times(-2)+2\times0+3-5|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}$$

$$=\frac{|-6+3-5|}{\sqrt{9+41}}=\frac{4\sqrt{14}}{7}$$

و منه:

$$R=\frac{4\sqrt{14}}{7}$$

و لدينا $\Omega(-2,0,3)$ هي مركز الفلكة (S) إذن معادلة:

$$(x+2)^2+y^2+(z-3)^2=\frac{32}{7}$$

5- لندرس تقاطع الفلكة (S) و المستقيم (CD) :

نحدد معادلتين ديكارتيتين ل (CD) :

لدينا (CD) موجه ب $\overrightarrow{CD}(-1,1,1)$ و يمر من $C(0,3,-1)$ و منه

تمثيل بارامتري ل (CD) هو:

$$(CD)\begin{cases} x=-t \\ y=3+t \\ z=1+t \end{cases}$$

لهذا نحل النظمة التالية :

$$M(x,y,z)\in(S)\cap(CD)\Leftrightarrow\begin{cases}(x+2)^2+4^2+(z+3)^2=\frac{3^2}{7} \\ x=-t \\ y=3+t \\ z=-1+t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(2+t)^2+(3+t)^2+(t-4)^2=\frac{32}{7}$$

$$\Leftrightarrow 3t^2-6t+\frac{171}{7}=0$$

$$\Delta=36-4\times3\times\frac{171}{7}=\frac{-1800}{7}$$

و منه المعادلة ليس لها حل.

خلاصة:

$$(CD)\cap(S)=\varnothing$$

نإذ المستقيم خارج الفلكة.

تمرين:2

-1 لنحدد المركز Ω و الشعاع R للمعادلة (S) :

لدينا:

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y=0$$

أي:

$$(x-1)^2-1+(z+1)^2-1+y^2=0$$

و منه:

$$(x-1)^2+(z+1)^2+y^2=\sqrt{2}^2$$

و منه: $\Omega(1,0,-1)$ و $R=\sqrt{2}$

-2 نبين أن (D) يقطع الفلكة (S) في A و B

لهذا نحل النظمة التالية:

$$M(x,y,z)\in(D)\cap(S)\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2-2=0\\ x=1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$$

$$\Rightarrow(1+\lambda-1)^2+\lambda^2+(\lambda+\lambda)^2-2=0$$
$$\Rightarrow\lambda^2+\lambda^2+\lambda^2+2\lambda+1-2=0$$
$$\Rightarrow3\lambda^2+2\lambda-1=0$$

أو $\Rightarrow\lambda=-1$

$$\lambda = \frac{1}{3}$$

نعوض في النظمة:

$$\begin{cases} x = 1 - 1 = 0 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

و منه:

$$(D) \cap (S) = \left\{ A(0,-1,-1), B\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\}$$

3- نبين أن المستوى (P) مماس للفلكة في A :

ليكن (T) مماس للفلكة (S) في A

$$M(x,y,z) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z+1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y + 1 = 0$$

هذه المعادلة تمثل معادلة المستوى (P) و نعلم أنه

يوجد مستوى وحيد

للفلكة في نقطة A إذن :

$$(P) = (T)$$

بالتالي (P) مماس للفلكة في النقطة A

-4 لنحدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المماس

للفلكة (S) في B :

$$M(x, y, z) \in (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{B\Omega} . \overrightarrow{BM} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3x-4 \\ 3y-1 \\ 3z-1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x - 3y - 12z + 4 + 1 + 4 = 0$$

$$(Q) : x + y + 4z - 3 = 0$$

5- نثبت أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق (Δ):

حيث (Δ) عمودي على $(B\Omega A)$:

$$M(x,y,z)\in(P)\cap(Q)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+1=0\\x+y+4z-3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1-x\\4z=-x-y+z\end{cases}$$

نضع: $t=x$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=-1-t\\4z=1+1+t+3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=-1-t\,/\,\mathrm{t}\in\Re\\z=1\end{cases}$$

$\vec{u}(1,-1,0)$ متجهة موجهة ل (D).

– بين أن (Δ) عمودي على $(B\Omega A)$ لذلك نحسب :

$$\overrightarrow{\Omega B}.\vec{U}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\Omega A}.\vec{U}=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=-1+1=0$$

و بالتالي (Δ) عمودي على $(B\Omega A)$.

التمرين:3

-1 نبين أن **A** و **B** و **D** غير مستقيمية:

$\overrightarrow{\mathbf{AB}}(-4,-4,4)$ $\qquad$ $\overrightarrow{\mathbf{AC}}(-1,-4,-2)$

نحسب Δ :

$$\Delta\begin{vmatrix}-4 & -4\\ -2 & 4\end{vmatrix}=-16-8=-24\neq 0$$

خلاصة: **A** و **B** و **C** غير مستقيمية.

-2 نبين أن $\vec{n}(2,-1,1)$ منظمية على (ABC) :

(ABC) موجه ب $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ إذن نحسب كل من :

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-4\\-4\\4\end{pmatrix}=-8+4+4=0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\-4\\-2\end{pmatrix}=-2+4-2=0$$

إذن $\vec{n}$ منظمية على (ABC).

3- نبين أن G :

$$(P): x+y-z+2=0$$

إذن $\vec{n}(1,1,-1)$ منظمية على (P) نبين أن $\vec{n}.\overrightarrow{n'}=0$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{n'}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=2-1-1=0$$

خلاصة: $(ABC)\perp(P)$

4- أ- نبين أن الثابتات G في $(2,0,5)$:

لدينا G مرجح $(A,1);(B,-1);(C,2)$ إذن :

$$x_G=\frac{1\times1+(-1)(-3)+2\times0}{-1+1+2}=0$$

$$y_G=\frac{1\times2+(-1)(-2)+2\times(-2)}{2}=0$$

$$z_G=\frac{1\times(-1)-1\times 3+2\times(-3)}{2}=-5$$

خلاصة: $G(2,0,-5)$

ب– نبين أن $(CG)\perp(P)$:

لدينا (CG) و $\vec{n'}$ مستقيميتين و منه $(CG)\perp(P)$.

ج– نحدد إحداثيات H تقاطع (CG) و المستوى (P):

لدينا (CG) يمر من C و موجه ب $\overrightarrow{CG}$:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + 2t \,/\, t \in \Re \\ z = -3 - 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x = 2t \\ y = -2t + 2t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t - 2 + 2t + 3 + 2t + 2 = 0 \\ x = 2t \\ y = -2 + 2t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{-1}{2} \\ x = -1 \\ y = -3 \\ z = -2 \end{cases}$$

خلاصة: $H(-1,-3,-2)$

5- نحدد المجموعة (S) للنقط M من الفضاء التي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=12 \Leftrightarrow \left\|2MG\right\|=12 \Leftrightarrow MG=6$$

خلاصة:

مجموعة النقط (S) هي الفلكة التي مركزها $G(2,0,-5)$

و شعاعها $R=6$.

6- نحدد طبيعة العناصر المميزة لتقاطع المستوى (P)

و الفلكة (S) : لنحسب $d(G(P))$

$$d(G(P))=\frac{|2+5+2|}{\sqrt{3}}=\frac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$$

و لدينا $6\rangle 3\sqrt{3}$ إذن (P) و (S) يتقاطعان وفق دائرة مركزها

$M(x,y,z)$ المسقط العمودي ل G على (P) و شعاعها r :

$$r=\sqrt{R^2+d^2}=\sqrt{36-27}=\sqrt{9}=3$$

نحدد $D(x,y,z)$. لذلك نحل النظمة :

$$\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x=2+t \\ y=t \\ z=-5-t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+t+t+5+t+2=0 \\ x=2+t \\ y=0 \\ z=-5-t \end{cases} / t \in \Re$$

$$\begin{cases} t=-3 \\ x=2+t \\ y=t \\ z=-5-t \end{cases} / t \in \Re$$

إذن $H(-1,-3,-2)$.

خلاصة: تقاطع المستوى (P) و الفلكة (S) هي دائرة (C)

مركزها $H(-1,-3,-2)$ و شعاعها $r=3$.