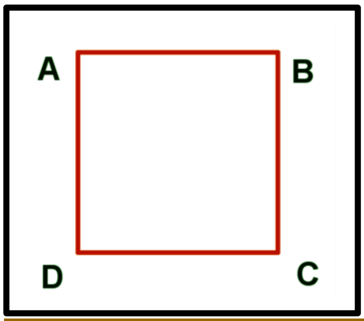
تمارين : الدوران في المستوى

01.



ننشئ داخل مربع $ABCD$ (أنظر الشكل) المثلث المتساوي الأضلاع BCI
و خارجه المثلث المتساوي الأضلاع DCJ

1. أنشئ الشكل .
2. نعتبر النقطة E حيث المثلث ACE متساوي الأضلاع و B داخله .
حدد صور النقط D و B و E بالدوران R الذي مركزه C و قياس زاويته $\frac{\pi}{3}$.
3. استنتج أن النقط I و J و A مستقيمية .

02.

نعتبر في المستوى الموجه دائرة $(\mathscr{C})$ مركزها O و A نقطة من الدائرة $(\mathscr{C})$.

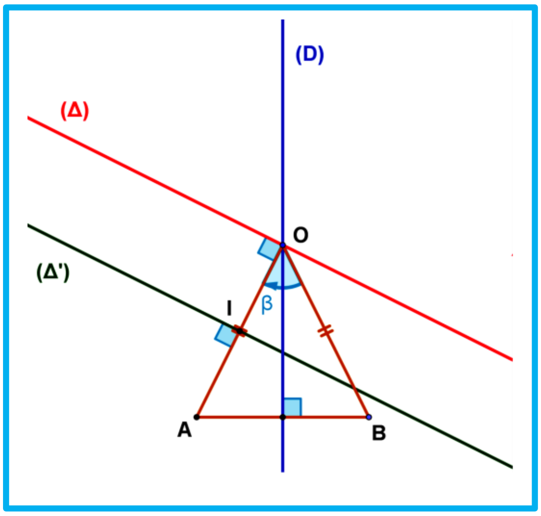
1. أنشئ $(\mathscr{C}')$ صورة $(\mathscr{C})$ بالدوران r الذي مركزه A و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$.
2. لتكن A و B نقطتي تقاطع $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$.
نعتبر نقطة M من الدائرة $(\mathscr{C})$ (حيث $M \neq A$) و M' صورة M بالدوران r.أثبت أن النقط M و B و M' مستقيمية .

03.

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j})$.
لنعتبر المستقيمين حيث $(D) : y - x = 0$ و $(D') : x = 0$.
نعتبر التماثلين المحوريين S_D و $S_{D'}$.

1. بين أن : $S_{D'} \circ S_D$ دوران يتم تحديد مركزه و قياس زاويته .
2. ليكن α عددا حقيقيا معلوما ؛ حدد حسب قيم α مجموعة النقط M حيث $MM' = \alpha$ مع $S_{D'} \circ S_D(M) = M'$.

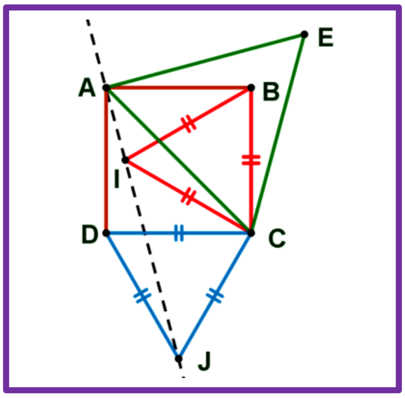
04.



ليكن OAB مثلثا متساوي الساقين رأسه O حيث : $(\overline{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}) \equiv \beta \ [2\pi]$.
نعتبر المستقيم (Δ) المار من O و العمودي على المستقيم (AO) .
و المستقيم (Δ') المار من I منتصف $[AO]$ و العمودي على (AO) .
و المستقيم (D) ارتفاع المثلث OAB المنشأ من O .
نعتبر التماثل المحوري S_D الذي محوره (D) .

1. بين أن : التطبيق $t = S_\Delta \circ S_{\Delta'}$ إزاحة يتم تحديد متجهتها .
2.
أ- أنشئ $S_\Delta(A) = A_1$ و $S_D(A_1) = A'$ ثم بين أن $(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}}) \equiv \pi - \beta \ [2\pi]$
ب- استنتج طبيعة التحويل $r = S_D \circ S_\Delta$.
3. بين أن : $r \circ t$ دوران يتم تحديد مركزه فقط .

.01



ننشئ الشكل :

1. نحدد صور النقط D و B و E بالدوران :

بما أن المثلث DCJ المتساوي الأضلاع إذن : $\begin{cases} CD = CJ \\ \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CJ}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases}$ ومنه $R(D) = J$.

بنفس الطريقة نبين أن : $R(B) = I$ و $R(E) = A$.

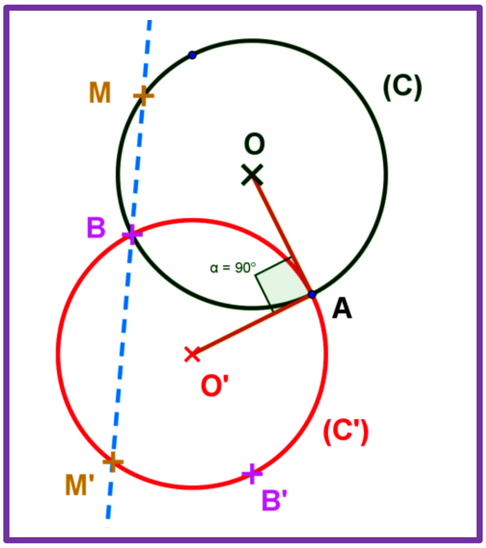
2. استنتج أن النقط I و J و A مستقيمية .

المستقيم (DB) هو واسط القطعة $[AC]$ و نعلم أن $CE = AE$ ومنه: $E \in (DB)$.

إذن النقط D و B و E مستقيمية و بالتالي $R(D) = J$ و $R(B) = I$ و $R(E) = A$ لأن الدوران يحافظ على استقامية النقط .

خلاصة : النقط I و J و A مستقيمية .

.02



1. أنشئ $\left(\mathscr{C}'\right)$ صورة $\left(\mathscr{C}\right)$ بالدوران r الذي مركزه A و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$.

2. نثبت أن النقط M و B و M' مستقيمية .

لتكن A و B نقطتي تقاطع $\left(\mathscr{C}\right)$ و $\left(\mathscr{C}'\right)$.

لتكن B' صورة B بالدوران r.

لدينا :

- $\begin{cases} r : M \mapsto M' \\ r : B \mapsto B' \end{cases}$ ومنه : $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{B'M'}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ إذن: $(BM) \perp (BM') \quad (1)$
- $r : B \mapsto B'$ و منه : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ إذن: $(AB) \perp (AB')$.

ومنه : المثلث ABB' متساوي الساقين وقائم الزاوية في A .

لدينا : $B \in (C)$ إذن $B' \in (C')$ ومنه $[BB']$ قطر ل $\left(\mathscr{C}'\right)$.

بما أن : $M' \in (C')$ و $[BB']$ قطر ل $\left(\mathscr{C}'\right)$ إذن $(M'B) \perp (M'B') \quad (2)$.

من خلال (1) و (2) نحصل على المستقيمين (BM) و $(M'B')$ عموديين على نفس المستقيم (BM') إذن هما منطبقين

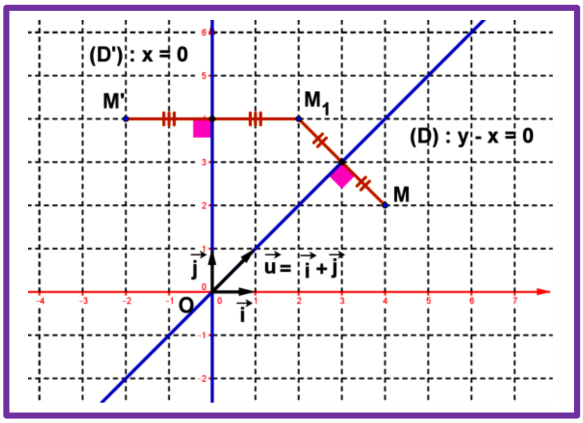
ومنه : $(BM) = (M'B')$.

خلاصة : $(BM) = (M'B')$ و بالتالي النقط M و B و M' مستقيمية .

.03

1. بين أن : $S_{D'} \circ S_D$ دوران يتم تحديد مركزه و قياس زاويته .

لدينا المستقيمين $D\left(O, \vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ و $D'\left(O, \vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ متقاطعين في O .



إذن $S_{D'} \circ S_D$ هو دوران مركزه O .

نحدد قياس زاويته :

لدينا :

$$\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) + \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) \ [2\pi]$$

$$\equiv 2\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) + 2\left(\overrightarrow{OM}, \vec{j}\right) \ [2\pi]$$

$$\equiv 2\left(\vec{u}, \vec{j}\right) \ [2\pi]$$

$$\equiv 2 \times \frac{\pi}{4} \ [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$$

ومه : $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

خلاصة : $S_{D'} \circ S_D$ هو دوران الذي مركزه O و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$ أو أيضا : $S_{D'} \circ S_D = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$.

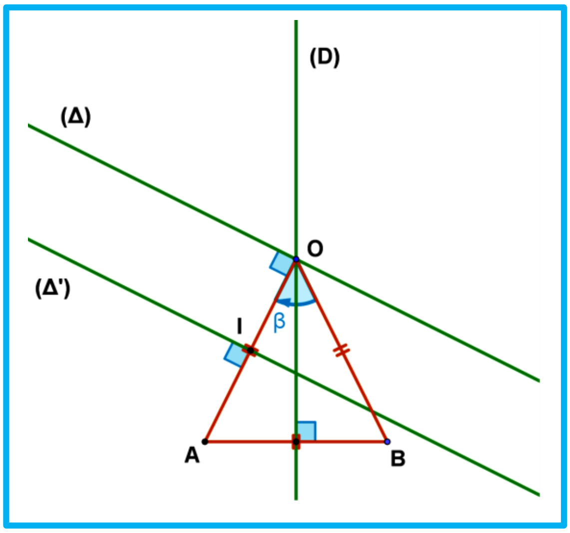
2. نحدد حسب قيم α مجموعة النقط M حيث $MM' = \alpha$

حسب ما سبق : $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$ إذن $(OM) \perp (OM')$ و $OM = OM'$ ومنه المثلث OMM' متساوي الساقين وقائم الزاوية في O. من خلال خاصية فيثاغورس نحصل على $OM^2 + OM'^2 = MM'^2 \Leftrightarrow 2OM^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow OM^2 = \frac{\alpha^2}{2}$

ومنه : $OM = \frac{2\alpha}{\sqrt{2}}$.

مجموعة النقط M حيث $MM' = \alpha$ هي الدائرة $\mathscr{C}\left(O, \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)$.

.04



ليكن OAB مثلثا متساوي الساقين رأسه O .

نعتبر المستقيم (Δ) المار من O و العمودي على المستقيم (AO) .

و المستقيم (Δ') المار من I منتصف $[AO]$ و العمودي على (AO) .

و المستقيم (D) ارتفاع المثلث OAB المنشأ من O .

نعتبر التماثل المحوري S_D الذي محوره (D) .

1. بين أن : التطبيق $t = S_\Delta \circ S_{\Delta'}$ إزاحة يتم تحديد متجهتها .

لدينا : $(\Delta) \perp (AO)$ و $(\Delta') \perp (AO)$ إذن : $(\Delta) \parallel (\Delta')$

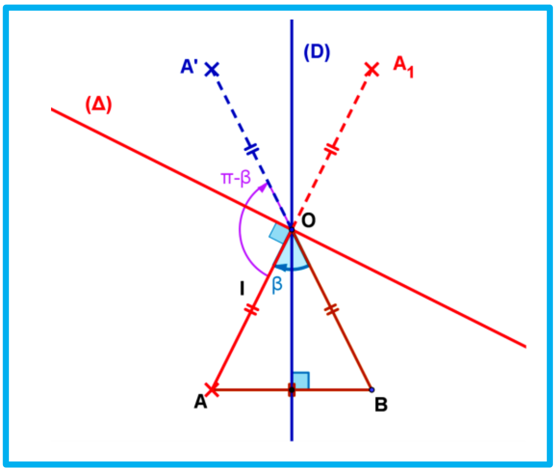
وبالتالي التحول $t = S_\Delta \circ S_{\Delta'}$ هو إزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{IO}$ (لأن (Δ') المار من I منتصف $[AO]$ و العمودي على (AO)) .

خلاصة : $S_\Delta \circ S_{\Delta'} = t_{\overrightarrow{AO}}$.

2. بين أن : التطبيق $r = S_D \circ S_\Delta$ دوران يتم تحديد مركزه و قياس زاويته .

أ- أنشئ $S_{\Delta}(A)=A_1$ و $S_D(A_1)=A'$ ثم بين أن $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}\right)\equiv\pi-\beta\ [2\pi]$

أنظر الشكل بالنسبة ل $S_{\Delta}(A)=A_1$ و $S_D(A_1)=A'$



لدينا :

- نحدد α زاوية الدوران (أي $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right)\equiv\alpha\ [2\pi]$):

نضع : $S_{(D)}\circ S_{(\Delta)}=r : A\xrightarrow{S_{(\Delta)}}A_1\xrightarrow{S_{(D)}}A'$

$r:\ A\xrightarrow{\hspace{3cm}}A'$

لدينا : $(AO)\perp(\Delta)$ ومنه : $S_{\Delta}(A)=A_1\in(OA)$ (1)

من جهة أخرى : OAB مثلثا متساوي الساقين رأسه O

و المستقيم (D) ارتفاع المثلث OAB المنشأ من O

إذن (D) منصف داخلي للزاوية $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ (2) .

حسب (1) و (2) نستنتج أن : $S_D(A_1)=A'\in(OB)$ و ليست نقطة من نصف المستقيم $[O,B)$.

من جهة أخرى :

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA_1}\right)+\left(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA'}\right)\ [2\pi]$$
$$\equiv\pi+\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\ [2\pi]$$
$$\equiv\pi-\beta\ [2\pi]$$

ومنه : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}\right)\equiv\pi-\beta\ [2\pi]$.

خلاصة : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}\right)\equiv\pi-\beta\ [2\pi]$

ب- نستنتج طبيعة التحويل $r=S_D\circ S_{\Delta}$.

- لدينا : $(\Delta)\cap(D)=\{O\}$ و $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}\right)\equiv\pi-\beta\ [2\pi]$ إذن التحويل $r=S_D\circ S_{\Delta}$ هو دوران مركزه النقطة O و قياس زاويته هو $\pi-\beta$

خلاصة: التحويل $r=S_D\circ S_{\Delta}$ هو دوران مركزه النقطة O و قياس زاويته هو $\pi-\beta$ أي $S_D\circ S_{\Delta}=r(O,\pi-\beta)$

.3 بين أن : $r\circ t$ دوران يتم تحديد مركزه و قياس زاويته .

لدينا : $r\circ t=\left(S_D\circ S_{\Delta}\right)\circ\left(S_{\Delta}\circ S_{\Delta'}\right)$

$=S_D\circ\left(S_{\Delta}\circ S_{\Delta}\right)\circ S_{\Delta'}$ (لأن تركيب التطبيقات تجمعي)

$=S_D\circ I_{\mathcal{P}}\circ S_{\Delta'}$ (لأن $S_{\Delta}\circ S_{\Delta}$ هو التطبيق المطابق في المستوى)

$=S_D\circ S_{\Delta'}$

بمأن $(\Delta')\cap(D)=\{O\}$ إذن $S_D\circ S_{\Delta'}$ هو دوران مركزه O .

خلاصة : $r\circ t=S_D\circ S_{\Delta'}$ هو دوران مركزه O .