تمارين : المجموعات و التطبيقات

01

1. حدد المجموعة $E=\{y\in\in\mathbb{R}/\exists x\in\mathbb{R}, x^2+2xy+y^4=0\}$

2. لتكن A و B و C ثلاث أجزاء من مجموعة E بسط : $\left(\left(\overline{A\cap\overline{B}}\right)\cap\left(\overline{A\cap\overline{C}}\right)\right)\cup A$

3. أعط مثال مضاد على أن الاستلزام التالي غير صحيح : $C\subset A\cup B\Rightarrow(C\subset A$ أو $C\subset B)$.

4. لتكن E و F مجموعتين بين أن : $\mathcal{P}(E)\cup\mathcal{P}(F)\subset\mathcal{P}(E\cup F)$.أعط مثال مضاد يؤكد أن العكس غير صحيح .

5. لتكن A و B و C ثلاث أجزاء من مجموعة E بين أن : $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

6. لتكن A و B و C ثلاث أجزاء من مجموعة E بين أن : $(A\Delta B)\cap C\subset(A\cap C)\Delta(B\cap C)$.

7. لتكن A و B و C ثلاث أجزاء من مجموعة E بين أن : $A\Delta B=A\Delta C\Leftrightarrow B=C$.

02

1. لنعتبر التطبيقات التالية $f : E\to F$ و $g : F\to G$. أثبت ما يلي :

أ - (f تباينية) $\Rightarrow$ ($g\circ f$ تباينية) . ب - (g تباينية) $\Rightarrow$ (f شمولية و $g\circ f$ تباينية)

2. لتكن E مجموعة و f تطبيق من E إلى E حيث $f\circ f\circ f=f$. بين أن : (f تطبيق تبايني) $\Leftrightarrow$ (f تطبيق شمولي) .

3. لتكن E مجموعة و f تطبيق من E إلى E . بين أن : $\forall A\in\mathcal{P}(E)\ ;\ A\subset f^{-1}(f(A))$.

4. لتكن E و F و G ثلاث مجموعات و f_1 و f_2 تطبيقين من E إلى F و g تطبيق من F إلى G .

بين أن : $g\circ f_1=g\circ f_2$ و g تطبيق تبايني فأن $f_1=f_2$.

5. لتكن E و F و G ثلاث مجموعات . f تطبيق من E إلى F ؛ g_1 و g_2 تطبيقان من F إلى G .

بين أن : $(g_1\circ f=g_2\circ f$ و f تطبيق شمولي$)\Rightarrow g_1=g_2$.

03

نعتبر التطبيق f المعرفة على الشكل التالي : $\begin{cases} f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \\ (x,y)\mapsto(x+y,xy)\end{cases}$.

1. باقل من الحجج و بفعالية كبيرة بين أن التطبيق f ليس تبايني .

2. ليكن (s,p) زوج من $\mathbb{R}^2$ ما هو الشرط الضروري و الكافي (s,p) ينتمي ل $f(\mathbb{R}^2)$ ؟) .

3. حدد الصورة العكسية ب f ل $\{(s,p)\in\mathbb{R}^2/s^2-4p=1\}$

04

نعتبر التطبيقات : $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to I=[-1,+\infty[\\ x\mapsto f(x)=x^2-4x+3\end{cases}$ و $\begin{cases} g:I\to I \\ x\to g(x)=x+\sqrt{x+1}\end{cases}$ و $\begin{cases} h:\mathbb{N}\to\mathbb{Q} \\ n\mapsto h(n)=\dfrac{1}{n^2-2n+3}\end{cases}$

1. حدد : $f^{-1}(\{3\})$. ب هل f تبايني ؟

2. بين أن: $f(\mathbb{R})\subset[-1,+\infty[$. ب – حدد التطبيق $g\circ f$.

3. بين أن f تقابلي. ب – حدد تقابله العكسي f^{-1} .

4. بين بأن h غير تبايني.

من طرف التلاميذ : هند غريبي - نعمة الراضي - محمد الصادق - الطيبي وليد محمد - المهدي قصير - الياس بوفلجات - حمراوي عبد السلام

01.

1. نحدد المجموعة E :

$$E=\{y\in\mathbb{R}\ /\exists x\in\mathbb{R},\ x^2+2xy+y^4=0\}$$

المجموعة E عناصرها y من $\mathbb{R}$

بحيث يجب أن نجد x من $\mathbb{R}$ حيث: $x^2+2xy+y^4=0$

$(y\in\mathbb{R})$ لهذا نحل المعادلة: $\exists x\in\mathbb{R},\ x^2+2xy+y^4=0$

نحسب مميز المعادلة :

$$\Delta=4y^2-4y^4$$
$$=4y^2\left(1-y^2\right)$$

جدول إشارة Δ

y	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$4y^2$	+		+	0	+		+
$1-y^2$	-	0	+		+	0	-
$4y^2(1-y^2)$	-		+		+	0	-

حسب الجدول: $\Delta\geq 0$ على المجال $[-1,1]$

و منه: $E=[-1,1]$

2. نبسط : $\left(\left(\overline{A\cap\overline{B}}\right)\cap\left(\overline{A\cap\overline{C}}\right)\right)\cup A$

$\left(\left(\overline{A\cap\overline{B}}\right)\cap\left(\overline{A\cap\overline{C}}\right)\right)\text{U} = \text{A U}\left(\left(\overline{A}\cup B\right)\cap\left(\overline{A}\cup C\right)\right)\text{A}$

$$\left(\left(\overline{A\cap\overline{B}}\right)\cap\left(\overline{A\cap\overline{C}}\right)\right)\cup A=\left(\left(\overline{A}\cup B\right)\cap\left(\overline{A}\cup C\right)\right)\cup A$$
$$=\left(\left(\overline{A}\cup B\right)\cup A\right)\cap\left(\left(\overline{A}\cup C\right)\cup A\right)$$
$$=\left(\overline{A}\cup B\cup A\right)\cap\left(\overline{A}\cup C\cup A\right)$$
$$=\left(E\cup B\right)\cap\left(E\cup C\right)\quad ;\quad \left(\overline{X}\cup X=E\right)$$
$$=E\cap E\quad ;\quad \left(E\cup X=E\right)$$
$$=E$$

وبالتالي : $\left(\left(\overline{A\cap\overline{B}}\right)\cap\left(\overline{A\cap\overline{C}}\right)\right)\cup A=E$

نعطي مثال مضاد على أن الاستلزام غير صحيح :

$C\subset A\cup B\Rightarrow C\subset A$ او $C\subset B$ بحيث: A و B و C أجزاء من E

نأخذ: $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{4,5,6,7\}$ و $C=\{3,4,5,7\}$

لدينا: $C\subset A\cup B$ ولكن: $C\not\subset A$ و $C\not\subset B$

ومنه: $C\subset A\cup B\Rightarrow C\subset A$ أو $C\subset B$ عبارة خاطئة

3. نبين أن: $P(E)\cup P(F)\subset P(E\cup F)$

ليكن X من $(1): P(E)\cup P(F)$

$(1) \Rightarrow X\in P(E)$ او $X\in P(F)$

$\Rightarrow X\subset E$ او $X\subset F$

$\Rightarrow X\subset E\cup F$

$\Rightarrow X\in P(E\cup F)$

إذن: $X\in P(E)\cup P(F) \Rightarrow X\in P(E\cup F)$

خلاصة : $P(E)\cup P(F)\subset P(E\cup F)$

مثال مضاد:

ليكن: $E=\{1\}$ اذن: $P(E)=\{\phi,\{1\}\}$

و $F=\{2\}$ اذن: $P(F)=\{\phi,\{2\}\}$

$P(E)\cup P(F)=\{\phi,\{1\},\{2\}\}$ و نعلم ان: $P(E\cup F)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

ومنه: $P(E\cup F)\not\subset P(E)\cup P(F)$

4. نبين أن: $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

لتكن: A و B و C أجزاء من E

لدينا: $A\setminus(B\cap C)=A\cap\overline{(B\cap C)}$

$=A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})$

$=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C})$

$=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

- خلاصة : $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

5. نبين أن: $A\Delta B=A\Delta C \Leftrightarrow B=C$

✓ نبين أن: $B=C\Rightarrow A\Delta B=A\Delta C$

هو صحيح لأن: $A\Delta B=A\Delta C$

✓ نبين أن: $A\Delta B=A\Delta C \Leftrightarrow B=C$

نبين أن: $B\subset C$

ليكن x من B ونبين أن: $x\in C$

❖ حالة(1) : $x\in A$

لدينا: $x\in B$ اذن: $x\in(A\cap B)$ ومنه: $x\notin A\Delta B$ اذن: $x\notin A\Delta C$ لان: $(A\Delta B=A\cap C)$

بما أن: $x\notin A\Delta C$ و $x\in A$ فإن: $x\in A\Delta C$ اذن: $x\in C$

وبالتالي: $x\in B\Rightarrow x\in C$

- خلاصة (1): $B\subset C$

❖ حالة(2) : $x\notin A$ و $x\in B$ اذن: $x\in B\setminus A$

اذن: $x\in A\Delta B$

ومنه $x\in A\Delta C$ لان $A\Delta B=A\Delta C$

نعلم ان $x\notin A$ و $x\in A\Delta C$ اذن $x\in C$ ومنه $x\in B\Rightarrow x\in C$

- خلاصة (2) : $B\subset C$

خلاصة : في كلتا الحالتين $B\subset C$

وبنفس الطريقة نبين ان $C\subset B$

- خلاصة : $A\Delta B=A\Delta C\Rightarrow B=C$

من طرف التلاميذ : هند غريبي - نعمة الراضي - محمد الصادق - الطيبي وليد محمد - المهدي قصير - الياس بوفلجات - حمراوي عبد السلام

- خلاصة عامة : $A\Delta B = A\Delta C \Leftrightarrow B = C$

.02

1. أ - نبين أن : f تباينية من E إلى F .

لهذا نبين ان : $\forall x,x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

ليكن x و x' من E حيث $f(x) = f(x')$ (1) .

ومنه :

$$(1) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x'))$$
$$\Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x')$$
$$\Rightarrow x = x' \quad \text{(لأن } g \circ f \text{ تباينية) .}$$

وبالتالي $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

خلاصة : f تباينية من E إلى F .

ب – نبين أن : (g تباينية) $\Rightarrow$ (f شمولية و $g \circ f$ تباينية) .

نبين أن : g تباينية من F إلى G .

لهذا نبين ان : $\forall y,y' \in F \ , \ g(y) = g(y') \Rightarrow y = y'$

ليكن y و y' من F حيث $g(y) = g(y')$ (1) .

نعلم أن f شمولية من E إلى F إذن : يوجد x و x' من E حيث $y = f(x)$ و $y' = f(x')$ (1) .

$$(1) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x'))$$
$$\Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x')$$
$$\Rightarrow x = x' \quad \text{(لأن } g \circ f \text{ تباينية) .}$$
$$\Rightarrow f(x) = f(x') \quad \text{(لأن } f \text{ تطبيق) .}$$
$$\Rightarrow y = y'$$

وبالتالي $g(y) = g(y') \Rightarrow y = y'$.

خلاصة : g تباينية من F إلى G .

2. نبين أن : (f تطبيق تبايني) $\Leftrightarrow$ (f تطبيق شمولي) .

أ- نبين أن : (f تطبيق شمولي) $\Rightarrow$ (f تطبيق تبايني)

لهذا نبين : $\forall y \in E, \exists x \in E / y = f(x)$.

ليكن y من E .

لدينا : $f \circ f \circ f(y) = f(y) \Rightarrow f(f \circ f(y)) = f(y)$

$$\Rightarrow f \circ f(y) = y \quad \text{(لأن } f \text{ تطبيق تبايني)}$$
$$\Rightarrow f(f(y)) = y$$

إذن يوجد سابق ل y هو $f(x)$

خلاصة 1 : f تطبيق شمولي .

ب- نبين أن : (f تطبيق تبايني) $\Rightarrow$ (f تطبيق شمولي) .

نبين أن : f تباينية من E إلى E .

لهذا نبين أن : $\forall x,x'\in E, f(x)=f(x') \Rightarrow x=x'$

ليكن x و x' من E حيث $f(x)=f(x')$ (1) .

نعلم أن : f تطبيق شمولي إذن يوجد x_1 و x_1' من E حيث $f(x_1)=x$ و $f(x'_1)=x'$ (2)

ومنه : $(1)\Rightarrow (f\circ f)(f(x_1))=(f\circ f)(f(x_1'))$ (نركب بالتطبيق $f\circ f$)

$\Rightarrow (f\circ f)\circ f(x'_1)=(f\circ f)\circ f(x_1)$ (نركب بالتطبيق $f\circ f$)

$\Rightarrow f\circ f\circ f(x'_1)=f\circ f\circ f(x_1)$ (لأن مركب التطبيقات تجميعي)

$\Rightarrow f(x'_1)=f(x_1)$ (لأن $f\circ f\circ f=f$)

$\Rightarrow x=x'$ (حسب (2))

خلاصة 2 : f تطبيق تبايني

خلاصة : (f تطبيق تبايني) $\Leftrightarrow$ (f تطبيق شمولي) .

3. نبين أن : $f\left(f^{-1}(B)\right)\subset B$

ليكن : $y\in f\left(f^{-1}(B)\right)$

$y\in f\left(f^{-1}(B)\right)\Rightarrow \exists x\in f^{-1}(B)/f(x)=y$.

بما أن : $x\in f^{-1}(B)$ إذن $f(x)\in B$ أي $y\in B$

خلاصة : $f\left(f^{-1}(B)\right)\subset B$

4. بين أن : إذا كان $g\circ f_1=g\circ f_2$ و g تطبيق تبايني فإن $f_1=f_2$.

نبين أن : $f_1=f_2$

- لدينا : f_1 و f_2 تطبيقان من E إلى F إذن لهما نفس مجموعة الانطلاق وكذلك نفس مجموعة الوصول .
- نبين أن : $\forall x\in E\ ,\ f_1(x)=f_2(x)$.

ليكن x من E .

لدينا : $g\circ f_1(x)=g\circ f_2(x)$ (حسب المعطيات)

ومنه : $g(f_1(x))=g(f_2(x))$.

إذن : $f_1(x)=f_2(x)$ (لأن g تبايني)

خلاصة : $f_1=f_2$

5. نبين أن : $g_1=g_2 \Leftarrow$ ($g_1\circ f=g_2\circ f$ و f تطبيق شمولي) .

نبين أن : $g_1=g_2$

- لدينا : g_1 و g_2 تطبيقان من F إلى G إذن لهما نفس مجموعة الانطلاق وكذلك نفس مجموعة الوصول .
- نبين أن : $\forall y\in F\ ,\ g_1(x)=g_2(x)$.

ليكن y من F .

نعلم أن : f شمولية ومنه : $\forall y\in F,\exists x\in E/y=f(x)$. نضع $y=f(x)$: (1)

ومنه : $(1)\Rightarrow g_1(y)=g_1(f(x))$ (نركب بالدالة g_1)

$\Rightarrow g_1(y)=g_1\circ f(x)=g_1\circ f(x)$

$\Rightarrow g_1(y)=g_2(y)$ ($g_1\circ f=g_2\circ f$ حسب المعطيات)

خلاصة : $g_1=g_2$.

03

.1 نبين أن f ليس تبايني

بما أن الجمع و الضرب تبادليان فإن: (x,y) و (y,x) لهما نفس الصورة $(x+y\ ,xy)$

و منه: f ليس تبايني

.2 الشرط الضروري و الكافي لكي يكون الزوج (s,p) من $\mathbb{R}^2$ ينتمي الى $f(\mathbb{R}^2)$

لدينا: $(s,p)\in\mathbb{R}^2\ /\ (s,p)\in f(\mathbb{R}^2)$

$$(s,p)\in\mathbb{R}^2\ /\ (s,p)\in f(\mathbb{R}^2)\Leftrightarrow(s,p)\in\mathbb{R}^2;\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ f(x,y)=(s,p)$$

$$\Leftrightarrow(s,p)?R^2;?(x,y)?R^2\ /\ f(x+y,xy)=(s,p)$$

$$\Leftrightarrow(s,p)\in\mathbb{R}^2;\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\begin{cases}x+y=s\\ xy=p\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(s,p)\in\mathbb{R}^2;\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ X^2-sX+p=0\ \Leftrightarrow$$ x و y حلان للمعادلة

و هذه المعادلة لها حلول $\Leftrightarrow\Delta\geq 0$

$$\Leftrightarrow s^2-4p\geq 0$$

- خلاصة : الشرط الضروري و الكافي هو $s^2-4p\geq 0$

.3 نحدد الصورة العكسية ل $\{(s,p)\in\mathbb{R}^2\ /\ s^2-4p=1\}$

حسب ما سبق: $\Delta=1$

إذن : $X_2=\frac{s-\sqrt{\Delta}}{2}=\frac{s-1}{2}$ ؛ $X_1=\frac{s+\sqrt{\Delta}}{2}=\frac{s+1}{2}$

إذن: ($x=X_1$ و $y=X_2$) أو ($x=X_2$ و $y=X_1$)

- خلاصة : $f^{-1}(\{(s,p)\in R^2\ /\ s^2-4p=1\})=\{(X_1,X_2)\ ;\ (X_2,X_1)\}$

04

.1 * لنحدد $f^{-1}(\{3\})$:

$$x\in f^{-1}(\{3\})\Leftrightarrow f(x)\in\{3\}$$
$$\Leftrightarrow f(x)=3$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x=0$$
$$\Leftrightarrow x(x-4)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ او } x-4=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ او } x=4$$

إذن: $f^{-1}(\{3\})=\{0,4\}$

من طرف التلاميذ : هند غربيي - نعمة الراضي - محمد الصادق - الطيبي وليد محمد - المهدي قصير - الياس بوفلجات - حمراوي عبد السلام

* f ليست تباينية لان 3 سابقين هما 0 و 4 .

.2

أ- نبين أن : $f(\mathbb{R})\subset[-1,+\infty[$

أي نبين ان : $y\in f(\mathbb{R})\Rightarrow y\in[-1,+\infty[$

لدينا :

$$\begin{aligned} y\in f(\mathbb{R}) &\Rightarrow \exists x\in\mathbb{R}, f(x)=y \\ &\Rightarrow \exists x\in\mathbb{R}, y=x^2-4x+3 \\ &\Rightarrow \exists x\in\mathbb{R}, y+1=(x-2)^2 \\ &\Rightarrow \exists x\in\mathbb{R}, y+1\geq 0 \\ &\Rightarrow \exists x\in\mathbb{R}, y\geq -1 \\ &\Rightarrow \exists x\in\mathbb{R}, y\in[-1,+\infty[\end{aligned}$$

ومنه: $y\in f(\mathbb{R})\Rightarrow y\in[-1,+\infty[$

- خلاصة : $f(\mathbb{R})\subset[-1,+\infty[$

ب- تحديد التطبيق: $g\circ f$

لدينا :

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2-4x+3) \\ &= x^2-4x+3+\sqrt{x^2-4x+3} \\ &= x^2-4x+3+\sqrt{(x-2)^2} \\ &= x^2-4x+3+|x-2| \end{aligned}$$

- خلاصة : $g\circ f:\mathbb{R}\xrightarrow{f} I\xrightarrow{g} I$

$x\to g\circ f(x)=x^2-4x+3+|x-2|$

.3

أ- نبين أن g تقابل :

أي نبين أن : $\forall y\in I,\exists! x\in I / g(x)=y$

ليكن $y\in I$ نحل المعادلة : $x\in I / g(x)=y$

$$\begin{aligned} g(x)=y &\Leftrightarrow x+\sqrt{x+1}=y \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=y-x \\ &\Leftrightarrow x+1=y^2-2xy+x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2-x(2y+1)-1+y^2=0 \end{aligned}$$

نحسب : Δ

$$\Delta=(2y+1)^2-4(y^2-1)$$

$$\Delta=4y^2+4y+1-4y^2+4$$

$$\Delta=4y+5\geq 1$$

و منه: $X_2=\dfrac{2y+1-\sqrt{4y+5}}{2}$ او $X_1=\dfrac{2y+1+\sqrt{4y+5}}{2}$

نبين أن: $g^{-1}(y)=\dfrac{2y+1+\sqrt{4y+5}}{2}$ غير ممكن

مثال مضاد : $g(3)=5$

أي: $g:3\to 5$ إذن: $g^{-1}:5\to 3$ ولكن: $g^{-1}(5)=\dfrac{2\times 5+1+\sqrt{(4\times 5)+5}}{2}=8$

إذن: $g^{-1}(5)\neq 3$

و بالتالي: المعادلة لها حل وحيد هو : $X_2=\dfrac{2y+1-\sqrt{4y+5}}{2}$

- خلاصة : g تقابل من I إلى I

ب- نحدد : g^{-1}

حسب ما سبق نستنتج أن :

$$g^{-1}:I\to I$$
$$x\to g^{-1}(x)=\frac{2x+1-\sqrt{4x+5}}{2}$$

4. لنبين أن h غير تبايني :

لدينا :
$$h:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$$
$$n\to h(n)=\frac{1}{n^2-2n+3}$$

لكي يكون h تبايني يجب أن يتحقق ما يلي :

$$\forall x,x'\in\mathbb{N}/h(x)=h(x')\Rightarrow x=x'$$

ليكن x و x' من $\mathbb{N}$ حيث: $h(x)=h(x')$

لدينا :
$$h(x)=h(x')\Rightarrow\frac{1}{x^2-2x+3}=\frac{1}{x'^2-2x'+3}$$
$$\Rightarrow x^2-2x+3=x'^2-2x'+3$$
$$\Rightarrow x^2-x'^2-2x+2x'=0$$
$$\Rightarrow (x-x')(x+x')-2(x-x')=0$$
$$\Rightarrow (x-x')(x+x'-2)=0$$
$$\Rightarrow x-x'=0 \text{ او } x+x'-2=0$$
$$\Rightarrow x=x' \text{ او } x+x'=2$$

ومنه: h غير تبايني

مثال مضاد: $h(0)=h(2)=\dfrac{1}{3}$ ولتكن: $0\neq 2$

- خلاصة : $h(x)$ تطبيق غير تبايني

5. استنتاج تطبيق k يكون قصور ل h و تبايني :

لنعتبر القصور التالي

$$k:\mathbb{N}\setminus\{2\}\to\mathbb{Q}$$
$$n\to\frac{1}{n^2-2n+3}$$

أو القصور التالي:

$$k:\mathbb{N}^*\to\mathbb{Q}$$
$$n\to\frac{1}{n^2-2n+3}$$

بتاريخ : 2015/01/31 11:15 ص