سلسلة 2	المرجـــــح	السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية

تمرين 1 : ABC مثلث حيث $AB=3$ و $AC=4$ و $BC=5$

1) أنشئ النقط :

I مرجح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(B,2)$

J مرجح النقطتين المتزنتين $(C,3)$ و $(A,1)$

K مرجح النقطتين المتزنتين $(B,2)$ و $(C,3)$

2) أنشئ G مرجح النقط المتزنة $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$

3) بين أن المستقيمات (CI) و (BJ) و (AK) متلاقية في G

تمرين 2 : ABC مثلث نعتبر النقطتين E و D حيث: $2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ و $\overrightarrow{DE}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

1) عبر عن D كمرجح للنقطتين A و B

2) عبر عن E كمرجح للنقطتين C و D

3) بين أن النقطة C مرجح النظمة المتزنة: $\{(A,2);(B,1);(E,6)\}$

4) لتكن H مرجح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(E,3)$.

5) بين أن النقط B و C و H

تمرين 3 : ABC مثلث. لتكن O منتصف $[BC]$ و لتكن H مرجح النظمة المتزنة $\{(A,-1);(B,2);(C,2)\}$

1) بين أن $\overrightarrow{OH}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}$ ثم أنشئ النقطة H

2) لتكن G مركز ثقل المثلث ABC ، بين أن النقطة O منتصف القطعة $[HG]$

تمرين 4 : $ABCD$ متوازي أضلاع.

لتكن E مرجح النقطتين المتزنتين $(C,1)$ و $(B,2)$ و F مرجح النقطتين المتزنتين $(C,3)$ و $(D,-2)$

1) أنشئ الشكل

2) بين أن A مرجح النقطتين المتزنتين $(E,3)$ و $(F,-1)$

3) ماذا تستنتج؟

تمرين 5 : ABC مثلث

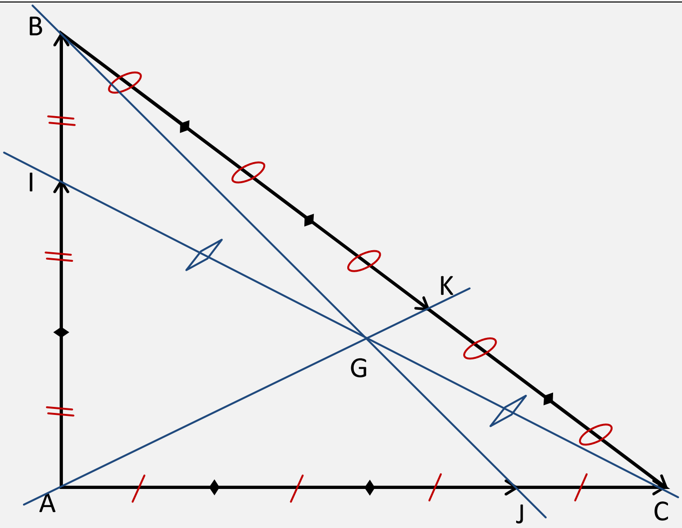
لتكن E مرجح النقطتين المتزنتين $(C,-3)$ و $(B,1)$ و F مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,1)$

1) أنشئ الشكل

2) بين أن $(AE)//(CF)$

السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	المرجـــــــح حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 : $AB=3$ و $AC=4$ و $BC=5$



1

لدينا I مرجح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(B,2)$

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$$

نأخذ: $M=A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

لدينا J مرجح النقطتين المتزنتين $(C,3)$ و $(A,1)$

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{MA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{MC}$$

نأخذ: $M=A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

لدينا K مرجح النقطتين المتزنتين $(B,2)$ و $(C,3)$

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{MB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{MC}$$

نأخذ: $M=A$ فنجد أن: $\overrightarrow{BK}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

2

لدينا G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و I مرجح النقطتين $(A,1)$ و $(B,2)$

إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح النقط $(I,3)$ و $(C,3)$ أي أن G منتصف $[IC]$

3

لدينا G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و J مرجح النقطتين المتزنتين $(C,3)$ و $(A,1)$

إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح النقط $(B,2)$ و $(J,4)$ إذن $G\in(BJ)$

لدينا G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و K مرجح النقطتين المتزنتين $(B,2)$ و $(C,3)$

إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح النقط $(A,1)$ و $(K,5)$ إذن $G\in(AK)$

و حسب السؤال السلبق $G\in(IC)$

بالتالي: المستقيمات (CI) و (BJ) و (AK) متلاقية في G

خاصية التجميعية مفيدة في كثير من البراهين حيث تكون كافية للبرهان عن الاستقامية لأن مرجح نقطتين تكون مستقيمية مع هتين النقطتين.

تمرين 2 : $2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ و $\overrightarrow{DE}+3\overrightarrow{EC}=\vec{0}$

1

لدينا $2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ منه: D مرجح النقطتين $(A,2)$ و $(B,1)$

2

لدينا $\overrightarrow{DE}+3\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ منه: $-\overrightarrow{ED}+3\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ منه: E مرجح النقطتين $(D,-1)$ و $(C,3)$

3

لبين أن النقطة C مرجح النظمة المتزنة: $\{(A,2);(B,1);(E,6)\}$ أي لنبين أن: $2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+6\overrightarrow{CE}=\vec{0}$

لدينا E مرجح النقطتين $(D,-1)$ و $(C,3)$ منه: $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{ME}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{MD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{MC}$

نأخذ: $M=C$ فنجد أن: $\overrightarrow{CE}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{CD}$ (1)

و لدينا D مرجح النقطتين $(A,2)$ و $(B,1)$ منه: $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$

نأخذ: $M=C$ فنجد أن: $\overrightarrow{CD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن: $\overrightarrow{CE}=\frac{-1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right)$ أي: $\overrightarrow{CE}=\frac{-2}{6}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$ أي: $6\overrightarrow{CE}=-2\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$

بالتالي : $2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+6\overrightarrow{CE}=\vec{0}$

يمكن أيضا استعمال علاقة شال باستعمال المعطيات مباشرة ، لكن الأمر يتطلب استعمال متساويات كثيرة، لذلك استعمال الخاصية المميزة يسمح باختصار الوقت.

4 لدينا H مرجح النقطتين $(A,1)$ و $(E,3)$ إذن حسب خاصية الصمود H مرجح النقطتين $(A,2)$ و $(E,6)$
وبما أن C مرجح $(A,2);(B,1);(E,6)$ فحسب خاصية التجميعية C مرجح $(B,1);(H,8)$
بالتالي النقط B و C و H مستقيمية.

للبرهان على الاستقامية يمكن البرهان على أن إحدى النقط الثلاث مرجح باقي النقطتين.
الشكل غير مطلوب ، لذلك لم يتم رسم أي شكل

تمرين 3 : O منتصف $[BC]$ ، H مرجح $\{(C,2);(B,2);(A,-1)\}$

1 لدينا : H مرجح $(C,2);(B,2);(A,-1)$ إذن $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MH}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MC}$
نأخذ: $M=O$ فنجد أن: $\overrightarrow{OH}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$ منه : $\overrightarrow{OH}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}$
(لأن $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ لكون O منتصف $[BC]$) ، بالتالي $\overrightarrow{OH}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}$

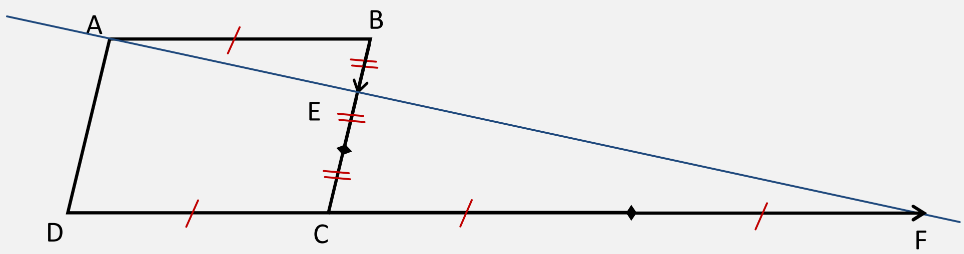
لم يتم رسم الشكل لكونه لا يتضمن الجديد

2 لنبين أن النقطة O منتصف القطعة $[HG]$ أي نبين أن : $\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OG}=\vec{0}$
لدينا G مركز ثقل المثلث ABC إذن G مرجح $(C,1);(B,1);(A,1)$
إذن : $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$ نأخذ : $M=O$ نجد :
$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$
بالتالي : $\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OG}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\vec{0}$

تمرين 4 : $ABCD$ متوازي أضلاع. E مرجح $(C,1)$ ، F مرجح $(C,3)$ و $(D,-2)$

1 لدينا E مرجح النقطتين المتزنتين $(C,1)$ و $(B,2)$
إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:
$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{ME}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$
نأخذ: $M=B$ فنجد أن: $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

لدينا F مرجح النقطتين المتزنتين $(C,3)$ و $(D,-2)$
إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:
$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MF}=\frac{3}{1}\overrightarrow{MC}+\frac{-2}{1}\overrightarrow{MD}$
نأخذ: $M=D$ فنجد أن: $\overrightarrow{DF}=3\overrightarrow{DC}$



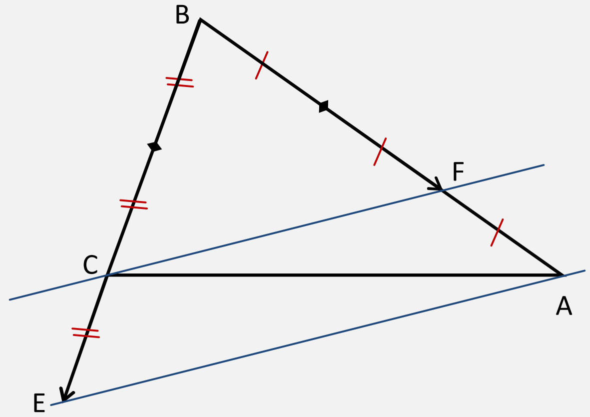
2 لنبين أن A مرجح النقطتين المتزنتين $(E,3)$ و $(F,-1)$ أي نبين : $3\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=\vec{0}$
لدينا: $3\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=3\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right)-\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\right)=3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DF}=3\overrightarrow{DC}+3\times\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$
بالتالي A مرجح النقطتين المتزنتين $(E,3)$ و $(F,-1)$

3 نستنتج أن النقط A و E و F مستقيمية.

تمرين 5 : ABC مثلث. E مرجح $(C,-3)$ و $(B,1)$ و F مرجح $(A,2)$ و $(B,1)$

1 لدينا E مرجح النقطتين المتزنتين $(C,-3)$ و $(B,1)$
إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:
$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{ME}=\frac{-3}{-2}\overrightarrow{MC}+\frac{1}{-2}\overrightarrow{MB}$

لدينا F مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,1)$
إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:
$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$

	نأخذ: $M=B$ فنجد أن: $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$	نأخذ: $M=B$ فنجد أن: $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$	
			
2	لدينا: $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ منه $\overrightarrow{BA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BF}$ منه : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{FB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{FC}$ بالتالي $(CF)//(AE)$		