نعتبر في الفضاء (ξ) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط :

$E\left(2,0,4\right),c\left(-1,1,1\right),B\left(2,0,3\right),A\left(0,0,1\right)$

1- أ – بين أن النقط A و B و C غير مستقيمية .

ب – بين أن : $x+y-z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

2 – حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A والموجه بالمتجهتين : $\vec{u}\left(3,-1,2\right)$ و $\vec{v}\left(2,0,3\right)$.

3 – أ – اكتب تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من E والموجه بالمتجهة $\overrightarrow{w}\left(4,-2,1\right)$.

ب حدد إحداثيات النقطة N تقاطع (Δ) والمستوى (ABC)

ج – بين أن $(\Delta)\subset(Q)$.

4 – استنتج تقاطع المستويين (ABC) و (Q) .

تمارين محلولة:تحليلية الفضاء

المستوى : الأولى باك علوم تجريبية

أكاديمية الجهة الشرقية

الأستاذ: نجيب عثماني

في كل ما يلي الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

تمرين1: نعتبر النقط A و B و C و D بحيث :

$\overrightarrow{OA}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ و $\overrightarrow{OB}=2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$ و

$\overrightarrow{OC}=\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$ و $\overrightarrow{AD}=3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$

1) حدد إحداثيات A و B و C و D في المعلم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

2) حدد إحداثيات المتجهات $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\vec{u}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ في الأساس $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

أجوبة 1: $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ يعني $A(1;2;-3)$

$\overrightarrow{OB}=2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$ يعني $B(2;5;3)$

$\overrightarrow{OC}=\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$ يعني $C(1;-4;2)$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}$ يعني $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{OA}$

يعني $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AO}=3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}+\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}=4\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$

يعني $D(4;4;2)$

2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\left(\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}\right)+2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$

$\overrightarrow{AB}=-\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}+2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}=\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$ ومنه $\overrightarrow{AB}(1;3;6)$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=-\left(\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}\right)+\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$

$\overrightarrow{AC}=-\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}+\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}=0\vec{i}-6\vec{j}+5\vec{k}$ ومنه $\overrightarrow{AC}(0;-6;5)$

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ يعني $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}-2\left(0\vec{i}-6\vec{j}+5\vec{k}\right)$

يعني $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}-2\left(0\vec{i}-6\vec{j}+5\vec{k}\right)=\vec{i}+15\vec{j}-4\vec{k}$ ومنه $\vec{u}(1;15;-4)$

تمرين2: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ النقط: $A(-3;2;1)$ و $B(5;3;-1)$

1) حدد مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}$

2) حدد مثلوث إحداثيات I منتصف القطعة $[AB]$

3) أحسب المسافة AB

الجواب : 1) $\overrightarrow{AB}(5+3;3-2;-1-1)$ يعني $\overrightarrow{AB}(8;1;-2)$

2) $I\left(\frac{5+(-3)}{2};\frac{3+2}{2};\frac{-1+1}{2}\right)$ يعني $I\left(1;\frac{5}{2};0\right)$

3) $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(5+3)^2+(3-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{64+1+4}=\sqrt{69}$

تمرين3: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى الأساس $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ المتجهات $\vec{u}(1;-1;2)$ و $\vec{v}(-2;2;-4)$ و $\vec{w}(1;1;2)$

1) أدرس استقامية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

2) أدرس استقامية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{w}$

الأجوبة : 1)نحسب المحددات المستخرجة :لدينا

$$\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2-2=0 \text{ و } \begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-4+4=0 \text{ و } \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=4-4=0$$

ومنه المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين

2) نحسب المحددات المستخرجة :لدينا $\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-2-2=-4\neq 0$

ومنه المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{w}$ غير مستقيميتين

تمرين4: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ النقط $A(1;2;1)$ و $B(2;1;3)$ و $C(-1;4;-3)$ و $D(2;3;3)$

1. أدرس استقامية النقط A و B و C
2. أدرس استقامية النقط A و B و D

الأجوبة : 1) $\overrightarrow{AB}(2-1;1-2;3-1)$ يعني $\overrightarrow{AB}(1;-1;2)$

$\overrightarrow{AC}(-1-1;4-2;-3-1)$ يعني $\overrightarrow{AC}(-2;2;-4)$

نحسب المحددات المستخرجة :لدينا

$$\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2-2=0 \text{ و } \begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-4+4=0 \text{ و } \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=4-4=0$$

ومنه المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتين وبالتالي النقط : A و B و C مستقيمية

2) $\overrightarrow{AB}(1;-1;2)$ و $\overrightarrow{AD}(1;1;2)$

$\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-2-2=-4\neq 0$ ومنه المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مستقيميتين

وبالتالي النقط : A و B و D غير مستقيمية

تمرين5: نعتبر المتجهات $\vec{u}(-1;1;1)$ و $\vec{v}(0;-4;4)$ و $\vec{w}(-2;0;4)$

أحسب محددة المتجهات : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$

الجواب:

$$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & -4 & 0\\ 1 & 4 & 4\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 4 & 4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0 & -2\\ 4 & 4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0 & -2\\ -4 & 0\end{vmatrix}$$

$$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & -4 & 0\\ 1 & 4 & 4\end{vmatrix}=-1\times-16-1\times 8+1\times(-8)=16-16=0$$

تمرين6: نعتبر المتجهات $\vec{u}(1;1;1)$ و $\vec{v}(-2;1;1)$

و $\vec{w}(0;1;2)$ و $\vec{x}(0;3;3)$

و $\vec{y}(1;m;2)$ حيث m بارا متر حقيقي.

1. بين أن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{x}$ مستوائية
2. بين أن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية
3. حدد العدد m بحيث تكون المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{y}$ مستوائية

<u>أجوبة :</u> 1) $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{x}\right)=\begin{vmatrix}1&-2&0\\1&1&3\\1&1&3\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&3\\1&3\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-2&0\\1&3\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-2&0\\1&3\end{vmatrix}$

$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{x}\right)=3-3+6-6=0$

ومنه : المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{x}$ مستوائية

2) $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}1&-2&0\\1&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-2&0\\1&2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-2&0\\1&1\end{vmatrix}$

$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=1+4-2=3\neq 0$

ومنه : المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية

3) $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{y}$ مستوائية يعني

$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{y}\right)=0$ يعني $\begin{vmatrix}1&-2&0\\1&1&m\\1&1&2\end{vmatrix}=0$ يعني

$1\begin{vmatrix}1&m\\1&2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-2&1\\1&2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-2&1\\1&m\end{vmatrix}=0$ يعني $6-3m=0$ يعني $m=2$

<u>تمرين7:</u> نعتبر النقط : $A(1;1;-2)$ و $B(0;2;-1)$ و $C(1;-3;2)$ و $D(-1;1;2)$ و $E(1;1;3)$

1. بين أن النقط A و B و C و D مستوائية
2. بين أن النقط A و B و C و E مستوائية؟

<u>أجوبة :</u> 1) $\overrightarrow{AB}(-1;1;1)$ و $\overrightarrow{AC}(0;-4;4)$ و $\overrightarrow{AD}(-2;0;4)$ و

$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}-1&0&-2\\1&-4&0\\1&4&4\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-4&0\\4&4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0&-2\\4&4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&-2\\-4&0\end{vmatrix}=0$

ومنه : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مستوائية

و بالتالي النقط A و B و C و D مستوائية

2) $\overrightarrow{AE}(0;0;5)$

$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}\right)=\begin{vmatrix}-1&0&0\\1&-4&0\\1&4&5\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-4&0\\4&5\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0&0\\4&5\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&0\\-4&0\end{vmatrix}=20\neq 0$

ومنه : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AE}$ غير مستوائية

و بالتالي النقط A و B و C و E غير مستوائية

<u>تمرين8:</u> نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ النقط : $A(1;3;1)$ و $B(2;1;2)$ و $C(3;-3;1)$ و $D(2;-1;0)$ و المتجهة $\vec{u}(-1;4;1)$

1) حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (D) المار من A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}$

2) هل النقط $B(2;1;2)$ و $C(3;-3;1)$ و $D(2;-1;0)$ تنتمي للمستقيم (D)؟

3) حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (BC)

4) أدرس الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (BC)

<u>أجوبة :</u> 1) $(D)\begin{cases}x=1-t\\y=3+4t\\z=1+t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

2) $\begin{cases}2=1-t\\1=3+4t\\2=1+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\t=-\dfrac{1}{2}\\t=-1\end{cases}$ ومنه $B\notin(D)$

$\begin{cases}3=1-t\\-3=3+4t\\1=1+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-2\\t=-\dfrac{3}{2}\\t=0\end{cases}$ ومنه $C\notin(D)$ و $\begin{cases}2=1-t\\-1=3+4t\\0=1+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\t=-1\\t=-1\end{cases}$ ومنه $D\in(D)$

3) المستقيم (BC) يمر من النقطة $B(2;1;2)$ و $\overline{BC}(1;-4;-1)$ متجهة موجهة له اذن $(t\in\mathbb{R})$ $(BC)\begin{cases}x=2+1t\\y=1-4t\\z=2-t\end{cases}$

4) $\overrightarrow{BC}(1;-4;-1)$ و $\vec{u}(-1;4;1)$

نلاحظ أن : $\overrightarrow{BC}=-\vec{u}$ ومنه $\overrightarrow{BC}$ و $\vec{u}$ مستقيميتين

وبالتالي المستقيمين (D) و (BC) متوازيين

<u>تمرين9:</u> ليكن (D) و (Δ) مستقيمين من الفضاء معرفان على التوالي بتمثيليهما البرامتريان : $(D)\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=1+t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

$(\Delta)\begin{cases}x=3+k\\y=-1+2k\\z=3-k\end{cases}\quad(k\in\mathbb{R})$

بين أن المستقيمين (D) و (Δ) غير متوازيين

<u>الجواب :</u> $\vec{u}(1;-1;1)$ متجهة موجهة ل (D)

و $\vec{v}(1;2;-1)$ متجهة موجهة ل (Δ)

نلاحظ أن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين

وبالتالي المستقيمين (D) و (Δ) غير متوازيين

<u>تمرين10:</u> حدد تمثيلا بارا متريا للمستوى $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ حيث: $A(1;-3;1)$ و $\vec{u}(-2;4;1)$ و $\vec{v}(-1;0;2)$

<u>الجواب :</u> $(P):\begin{cases}x=1-2t-t'\\y=-3+4t\\z=1+t+2t'\end{cases}$ حيث $(t\in\mathbb{R})$ و $(t'\in\mathbb{R})$

هو تمثيل بارا متريا للمستوى $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$

<u>تمرين11:</u> حدد معادلة ديكارتيه للمستوى (P) المار من $A(1;-3;1)$ و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}(-2;4;1)$ و $\vec{v}(-1;0;2)$

<u>الجواب :</u> نلاحظ أن $\vec{u}(-2;4;1)$ و $\vec{v}(-1;0;2)$ غير مستقيميتين

$M(x;y;z)\in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستوائية

يعني : $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$ يعني : $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$

$\overrightarrow{AM}(x-1;y+3;z-1)$ يعني : $\begin{vmatrix}x-1&-2&-1\\y+3&4&0\\z-1&1&2\end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-1)\begin{vmatrix}4&0\\1&2\end{vmatrix}-(y+3)\begin{vmatrix}-2&-1\\1&2\end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix}-2&-1\\4&0\end{vmatrix}=0$

يعني : $8(x-1)+3(y+3)+4(z-1)=0$ يعني : $8x-8+3y+9+4z-4=0$

يعني : $(P)\ :8x+3y+4z-3=0$

تمرين12: نعتبر النقط $A(1;2;3)$ و $B(1;1;2)$ و $C(-1;2;-1)$

1) بين أن النقط A و B و C غير مستقيمية

2) أعط تمثيلا بارامتريا للمستوى (ABC)

3) أعط معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

أجوبة : 1) $\overrightarrow{AB}(0;-1;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;0;-4)$

نحسب المحددات المستخرجة :لدينا $d_1=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & -4\end{vmatrix}=4\neq 0$

ومنه المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مستقيميتين وبالتالي النقط : A و B و C غير مستقيمية

2)لدينا المستوى (ABC) يمر من النقطة A و$\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{AC}$ متجهتين موجهتين له

اذن : $(P):\begin{cases}x=1+0t-2t'\\ y=2-1t+0t'\\ z=3-1t-4t'\end{cases}$ حيث $(t\in\mathbb{R})$ و $(t'\in\mathbb{R})$ هو تمثيل بارامتري للمستوى (ABC)

3) $M(x;y;z)\in(ABC)$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستوائية

يعني : $\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0$

$\overrightarrow{AM}(x-1;y-2;z-3)$ يعني : $\begin{vmatrix}x-1 & 0 & -2\\ y-2 & -1 & 0\\ z-3 & -1 & -4\end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-1)\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & -4\end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix}0 & -2\\ -1 & -4\end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix}0 & -2\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0$

يعني : $4(x-1)+2(y-2)-2(z-3)=0$ يعني : $4x-4+2y-4-2z+6=0$

يعني : $4x+2y-2z-2=0$ يعني : $(P)\ :2x+y-z-1=0$

ملحوظة 1:ليكن $(P)=P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ و$(Q)=P\left(B;\vec{u'};\vec{v'}\right)$ مستويين من الفضاء لدينا :

1. إذا كان : $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{u'}\right)=0$ و $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{v'}\right)=0$

فان : (P) و (Q) منطبقان أو متوازيان قطعا.

2. إذا كان : $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{u'}\right)\neq 0$ أو $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{v'}\right)\neq 0$

فان : (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم.

ملحوظة2:ليكن (P) و (P') مستويين من الفضاء معرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين :

$(P):ax+by+cz+d=0$ مع $(a;b;c)\neq(0;0;0)$

و $(P'):a'x+b'y+c'z+d'=0$ مع $(a';b';c')\neq(0;0;0)$

1. يكون المستويان (P) و (P') متقاطعين إذا وفقط إذا كان : $ab'-ba'\neq 0$ أو $ac'-ca'\neq 0$ أو $bc'-cb'\neq 0$.

2. يكون المستويان (P) و (P') متوازيين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم k بحيث : $a'=ka$ و $b'=kb$ و $c'=kc$.

3. يكون المستويان (P) و (P') منطبقين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم k بحيث :

$a'=ka$ و $b'=kb$ و $c'=kc$ و $d'=kd$

تمرين13: ليكن (P) و (Q) مستويين من الفضاء معرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين :

$(P)\ :3x-3y-6z-2=0$ و $(Q)\ :x-y-2z-3=0$

أدرس الوضع النسبي للمستويين : (P) و (Q)

الجواب : المستويان (P) و (P') متوازيين قطعا $k=3$

تمرين14: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

النقطة $A(1;1;0)$ و المتجهتين $\vec{u}(1;1;1)$ و $\vec{v}(1;-1;2)$

و المستوى (Q) الذي معادلة الديكارتية : $(Q)\ x+y-z+1=0$

1) أعط معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من A و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

2) أدرس الوضع النسبي للمستويين (Q) و (P) .

الجواب : 1)نلاحظ أن $\vec{u}(1;1;1)$ و $\vec{v}(1;-1;2)$ غير مستقيميتين

$M(x;y;z)\in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستوائية

يعني : $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$ يعني : $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$

$\overrightarrow{AM}(x-1;y-1;z)$ يعني : $\begin{vmatrix}x-1 & 1 & 1\\ y-1 & 1 & -1\\ z & 1 & 2\end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-1)\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0$

يعني : $3(x-1)-(y-1)-2z=0$ يعني : $(P)\ :3x-y-2z-2=0$

2) $(Q)\ :x+y-z+1=0$ و $(P)\ :3x-y-2z-2=0$

تمرين15: حدد معادلتان ديكارتيتان للمستقيم $(D)=D\left(A;\vec{u}\right)$ في الحالات التالية :

1) $A(1;-1;2)$ و $\vec{u}(1;2;3)$ متجهة موجهة له.

2) $A(1;-1;3)$ و $\vec{u}(0;1;2)$ متجهة موجهة له.

الجواب : 1) $\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$ يعني $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$

$$\begin{cases}\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}\\ \frac{x-1}{1}=\frac{z-2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-1)=y+1\\ 3(x-1)=z-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y-3=0\\ 3x-z-1=0\end{cases}$$

(2

$$\begin{cases}x=1\\ \frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ 2(y+1)=z-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ 2y-z+5=0\end{cases}$$

تمرين16: $(P)\ :3x-y-2z-2=0$ و $(t\in\mathbb{R})$ $(D)\begin{cases}x=1+t\\ y=2-t\\ z=3+2t\end{cases}$

أدرس الوضع النسبي للمستوى (P) و المستقيم (D)

الجواب : $(P)\ :x+y-z+1=0$

اذن : $(1+t)+(2-t)-(3+2t)t+1=0$ يعني $t=\frac{1}{2}$ اذن : (D) يقطع المستوى (P) في النقطة :

$$\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\\ y=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\\ z=3+2\frac{1}{2}=4\end{cases}$$

$A\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};4\right)$ هي نقطة التقاطع

تمرين17: $(P) :3x-y-2z-2=0$ و $(t\in\mathbb{R})$ $(D)\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=-2+4t\end{cases}$

أدرس الوضع النسبي للمستوى (P) و المستقيم (D)

الجواب : $(P) :5x+2y-3z-10=0$

اذن : $5(1+2t)+2(-1+t)-3(-2+4t)t-10=0$ يعني $-1=0$ غير ممكن اذن : (D) و (P) متوازيان قطعا

ملاحظة: ليكن $(D)=D(A;\vec{w})$ و $(P)=P(B;\vec{u};\vec{v})$

- إذا كان $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$ و $A\in(P)$ فان $(D)\subset(P)$
- إذا كان $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$ و $A\notin(P)$ فان (D) يوازي قطعا (P)
- إذا كان $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})\neq 0$ فان (D) يخترق (P).

تمرين18: $(D)=D(A;\vec{w})$ و $(P)=P(B;\vec{u};\vec{v})$ حيث $\vec{u}(1;-1;1)$

و $\vec{v}(0;1;0)$ و $\vec{v}(0;2;0)$ و $A(0;0;-1)$ و $B(1;0;0)$

1) حدد معادلة ديكارتية للمستوى $(P)=P(B;\vec{u};\vec{v})$

2) أدرس الوضع النسبي للمستوى (P) و المستقيم (D)

الجواب : 1) نلاحظ أن $\vec{u}(1;-1;1)$ و $\vec{v}(0;1;0)$ غير مستقيميتين

$M(x;y;z)\in P(B;\vec{u};\vec{v})$ يعني $\overrightarrow{BM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستوائية

يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$ يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$

$\overrightarrow{BM}(x-1;y;z)$ يعني : $\begin{vmatrix}x-1&1&0\\y&-1&1\\z&1&0\end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-1)\begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix}=0$

يعني : $-(x-1)-0+z=0$ يعني : $(P) :-x+z+1=0$

(2 $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&1&2\\1&0&0\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&0\\0&0\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&0\\1&2\end{vmatrix}=0$

ولدينا $A\in(P)$ لأن:

$(P) :-0-1+1=0$ ومنه $(D)\subset(P)$