سلسلة 1	عموميات حول الدوال	السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية

تمرين 1 : حدد مجموعة تعريف الدوال التالية :

$$f(x)=\frac{4|x|+3}{x^2+4x+4} \quad ، \quad g(x)=\frac{x^3-5}{2|x-3|-8} \quad ، \quad h(x)=\frac{6+x^4}{x-\frac{1}{x}} \quad ، \quad p(x)=\frac{5-|x|}{|x|+7}$$

$$q(x)=\frac{(5-x)(2-x)}{x^2+x-6} \quad ، \quad k(x)=\frac{5-|x|}{x^2-3x+4} \quad ، \quad t(x)=\frac{5-\sin(x)}{2\sin(x)-1} \quad ، \quad m(x)=\sqrt{3-|x-4|}$$

$$r(x)=\frac{x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x-2}} \quad ، \quad l(x)=\sqrt{x^3-8}+\frac{1-x}{|x+1|-|x-7|}$$

تمرين 2 : ادرس زوجية الدوال التالية :

$$f(x)=\frac{x^3}{|x|+5} \quad ، \quad g(x)=\frac{\cos(x)}{x^4+x^2+1} \quad ، \quad h(x)=\frac{\sin(x)}{x^3-1}$$

$$p(x)=|x|+|x+1|+|x-1| \quad ، \quad k(x)=\frac{\sqrt{|x-2|}+\sqrt{|x+2|}}{x^4-1}$$

تمرين 3 : نعتبر الدالة : $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}$

1) بين أن : $\forall x\in IR \quad x^2+2x+2>0$

2) حدد D_f

3) بين أن $\forall x\in IR \quad 1\le f(x)<2$

4) بين أن 1 هي القيمة الدنوية المطلقة للدالة f

5) بين أن 2 ليست قيمة قصوية للدالة f

تمرين 4 : نعتبر الدالة : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{3}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}$

1) حدد D_f

2) بين أن 2 هي القيمة الدنوية المطلقة للدالة f

السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	عموميات حول الدوال حل مقترح	سلسلة 1

تمرين 1 : لنحدد مجموعة تعريف الدوال التالية :

$$f(x)=\frac{4|x|+3}{x^2+4x+4}$$

$$Df=\{x\in IR \ / \ x^2+4x+4\neq 0\}$$
$$Df=\{x\in IR \ / (x+2)^2\neq 0\}$$
$$Df=\{x\in IR \ / \ x+2\neq 0\}$$
$$Df=\{x\in IR \ / \ x\neq -2\}$$
$$Df=]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$$

$$g(x)=\frac{x^3-5}{2|x-3|-8}$$

$$Dg=\{x\in IR / 2|x-3|-8\neq 0\}$$
$$Dg=\{x\in IR / |x-3|\neq 4\}$$
$$Dg=\{x\in IR / x-3\neq 4 \ \ et \ \ x-3\neq -4\}$$
$$Dg=\{x\in IR / x\neq 7 \ \ et \ \ x\neq -1\}$$
$$Dg=]-\infty,-1[\cup]-1,7[\cup]7,+\infty[$$

$$h(x)=\frac{6+x^4}{x-\frac{1}{x}}$$

$$Dh=\left\{x\in IR \ / \ x\neq 0 \ \ et \ \ x-\frac{1}{x}\neq 0\right\}$$
$$Dh=\left\{x\in IR \ / \ x\neq 0 \ \ et \ \ x\neq \frac{1}{x}\right\}$$
$$Dh=\{x\in IR \ / \ x\neq 0 \ \ et \ \ x^2\neq 1\}$$
$$Dh=\{x\in IR \ / \ x\neq 0 \ \ et \ \ x\neq 1 \ \ et \ \ x\neq -1\}$$
$$Dh=]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$$

$$p(x)=\frac{5-|x|}{|x|+7}$$

$$Dp=\{x\in IR \ / \ |x|+7\neq 0\}$$
$$Dp=\{x\in IR \ / \ |x|\neq -7\}$$
$$Dp=IR$$

لأن العبارة $|x|\neq -7$ صحيحة لكل x من IR وذلك لكون $|x|\geq 0$ بينما $-7<0$

$$q(x)=\frac{(5-x)(2-x)}{x^2+x-6}$$

$$Dq=\{x\in IR \ / \ x^2+x-6\neq 0\}$$

محددة الحدودية x^2+x-6 هي :

$$\Delta=1^2-4\times 1\times(-6)=1+24=25>0$$

حلا المعادلة $x^2+x-6=0$ هما :

$$x_2=\frac{-1-5}{2}=-3 \quad \text{و} \quad x_1=\frac{-1+5}{2}=2$$

منه :

$$Dq=\{x\in IR \ / \ x\neq 2 \ \ et \ \ x\neq -3\}$$
$$Dq=]-\infty,-3[\cup]-3,2[\cup]2,+\infty[$$

$$k(x)=\frac{5-|x|}{x^2-3x+4}$$

$$Dk=\{x\in IR / \ x^2-3x+4\neq 0\}$$

محددة الحدودية x^2-3x+4

هي : $\Delta=(-3)^2-4\times 1\times 4=9-16=-7<0$

إذن ليس للمعادلة $x^2-3x+4=0$ حل في IR

أي أن العبارة $x^2-3x+4\neq 0$ صحيحة لكل x من IR

بالتالي : $Dk=IR$

$$t(x)=\frac{5-\sin(x)}{2\sin(x)-1}$$

$$Dt=\{x\in IR \ / \ 2\sin(x)-1\neq 0\}=\left\{x\in IR \ / \ \sin(x)\neq\frac{1}{2}\right\}$$
$$Dt=\left\{x\in IR \ / \ \sin(x)\neq\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$
$$Dt=\left\{x\in IR \ / \ x\neq\frac{\pi}{6}+2k\pi \ \ et \ \ x\neq\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi ; k\in Z\right\}$$
$$Dt=\left\{x\in IR \ / \ x\neq\frac{\pi}{6}+2k\pi \ \ et \ \ x\neq\frac{5\pi}{6}+2k\pi ; k\in Z\right\}$$
$$Dt=IR_{\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi ; \frac{5\pi}{6}+2k\pi / k\in Z\right\}}$$

$$m(x)=\sqrt{3-|x-4|}$$

$$Dm=\{x\in IR \ / \ 3-|x-4|\geq 0\}$$
$$Dm=\{x\in IR \ / \ |x-4|\leq 3\}$$
$$Dm=\{x\in IR \ / -3\leq x-4\leq 3\}$$
$$Dm=\{x\in IR \ / 1\leq x\leq 7\}$$
$$Dm=[1,7]$$

$r(x)=\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x-2}}$	$l(x)=\sqrt{x^3-8}+\dfrac{1-x}{\lvert x+1\rvert-\lvert x-7\rvert}$
$Dr=\{x\in IR\ /\ x\geq 0\ \ et\ \ x^2+x-2\geq 0\}$ محددة الحدودية x^2+x-2 هي : $\Delta=1^2-4\times1\times(-2)=1+8=9>0$ حلا المعادلة $x^2+x-6=0$ هما : $x_1=\dfrac{-1+3}{2}=1$ و $x_2=\dfrac{-1-3}{2}=-2$ ، إذن : (table below) منه : $Dr=[0,+\infty[\cap(]-\infty,-2]\cup[1,+\infty[)$ $Dr=[1,+\infty[$	$Dl=\{x\in IR\ /\ x^3-8\geq 0\ et\ \lvert x+1\rvert-\lvert x-7\rvert\neq 0\}$ $Dl=\{x\in IR\ /\ x^3\geq 8\ et\ \lvert x+1\rvert\neq\lvert x-7\rvert\}$ $Dl=\left\{x\in IR\ /\ x\geq 2\quad et\quad \begin{matrix}x+1\neq x-7\\ x+1\neq 7-x\end{matrix}\right\}$ $Dl=\{x\in IR\ /\ x\geq 2\quad et\quad 1\neq -7\quad et\quad 2x\neq 6\}$ $Dl=\{x\in IR\ /\ x\geq 2\quad et\quad x\neq 3\}$ $Dl=[2,3[\cup]3,+\infty[$

x		-2		1	
x^2+x-2	+		-		+

لتحديد مجموعة التعريف يجب أن نبحث عن قيم x بحيث يكون :« المقام غير منعدم » - « ما بداخل الجذر المربع موجب »
و هذا ما يؤدي غالبا إلى البحث عن حلول معادلة أو متراجحة.

تمرين 2 : لندرس زوجية الدوال التالية :

$f(x)=\dfrac{x^3}{\lvert x\rvert+5}$	$g(x)=\dfrac{\cos(x)}{x^4+x^2+1}$
▪ $Df=\{x\in IR\ /\ \lvert x\rvert+5\neq 0\}$ $Df=\{x\in IR\ /\ \lvert x\rvert\neq -5\}$ $Df=IR$ ▪ لدينا : $x\in IR\Rightarrow -x\in IR$ ▪ $\forall x\in IR\ \ f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{\lvert -x\rvert+5}$ $f(-x)=\dfrac{-x^3}{\lvert x\rvert+5}=-f(x)$ إذن $\boxed{f \text{ دالة فردية}}$	▪ $Dg=\{x\in IR\ /\ x^4+x^2+1\neq 0\}$ $Dg=\{x\in IR\ /\ (x^2)^2+(x^2)+1\neq 0\}$ $(\Delta<0)$ $Dg=IR$ ▪ لدينا : $x\in IR\Rightarrow -x\in IR$ ▪ $\forall x\in IR\ g(-x)=\dfrac{\cos(-x)}{(-x)^4+(-x)^2+1}$ $g(-x)=\dfrac{\cos(x)}{x^4+x^2+1}=g(x)$ إذن $\boxed{g \text{ دالة زوجية}}$
$h(x)=\dfrac{\sin(x)}{x^3-1}$	$p(x)=\lvert x\rvert+\lvert x+1\rvert+\lvert x-1\rvert$
▪ $Dh=\{x\in IR\ /\ x^3-1\neq 0\}$ $Dh=\{x\in IR\ /\ x^3\neq 1\}$ $Dh=\{x\in IR\ /\ x\neq 1\}$ $Dh=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ ▪ لدينا : $-1\in Dh$ لكن $-1\notin Dh$ إذن $\boxed{h \text{ ليست بدالة زوجية و لا فردية}}$	▪ $Dp=IR$ ▪ لدينا : $x\in IR\Rightarrow -x\in IR$ ▪ $\forall x\in IR\ p(-x)=\lvert x\rvert+\lvert x+1\rvert+\lvert x-1\rvert$ $p(-x)=\lvert -x\rvert+\lvert -x+1\rvert+\lvert -x-1\rvert$ $p(-x)=\lvert x\rvert+\lvert 1-x\rvert+\lvert -(x+1)\rvert$ $p(-x)=\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert+\lvert x+1\rvert$ $p(-x)=p(x)$ إذن $\boxed{p \text{ دالة زوجية}}$

$$k(x)=\frac{\sqrt{|x-2|}+\sqrt{|x+2|}}{x^4-1}$$

- $$Dk=\{x\in IR\ /\ x^4-1\neq 0\ et\ |x-2|\geq 0\ \ et\ |x+2|\geq 0\}$$
$$Dk=\{x\in IR\ /\ x^4\neq 1\}=\{x\in IR\ /\ x^2\neq 1\}$$
$$Dk=\{x\in IR\ /\ x\neq 1\ \ et\ \ x\neq -1\}$$
$$Dk=]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$$

- لدينا : $x\in Df\ \Rightarrow x\neq 1\ et\ x\neq -1\ \Rightarrow -x\neq -1\ et\ -x\neq 1\ \Rightarrow\ -x\in Df$

- $$\forall x\in IR\ k(-x)=\frac{\sqrt{|-x-2|}+\sqrt{|-x+2|}}{(-x)^4-1}=\frac{\sqrt{|-(x+2)|}+\sqrt{|x-2|}}{x^4-1}=\frac{\sqrt{|x+2|}+\sqrt{|x-2|}}{x^4-1}=k(x)$$

إذن $\boxed{k\ \text{دالة زوجية}}$

في الغالب،خصوصا عند دراسة الدوال لا يتم طرح السؤال بهذه الطريقة بل يطلب البرهان على أن الدالة زوجية أو فردية، لكن طرح السؤال بهذه الطريقة يجعل استيعاب مفهوم الزوجية أفضل، حيث نرى من خلال الدالة h مثالا لدالة لا زوجية و لافردية و طريقة البرهان في هذه الحالة.

تمرين 3 : $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}$

1	محددة الحدودية x^2+2x+2 هي $\Delta=2^2-4\times1\times2=4-8=-4<0$ إذن للحدودية x^2+2x+2 نفس إشارة $a=1$ أي أنها موجبة قطعا لكل x من IR
2	حسب السؤال السابق نستنتج أن : $D_f=\{x\in IR/\ x^2+2x+2\neq 0\}=IR$
3	لدينا : $f(x)-1=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}-1=\dfrac{2x^2+4x+3-(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}=\dfrac{2x^2+4x+3-x^2-2x-2}{x^2+2x+2}$ $f(x)-1=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x+2}\geq 0$ و لدينا : $f(x)-2=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}-2=\dfrac{2x^2+4x+3-2(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}=\dfrac{2x^2+4x+3-2x^2-4x-4}{x^2+2x+2}$ $f(x)-2=\dfrac{-1}{x^2+2x+2}<0$ بالتالي : $\boxed{\forall x\in IR\quad 1\leq f(x)<2}$
	استعملنا السؤال الأول و ذلك لتحديد إشارة المقام و استعملنا طريقة حساب الفرق مرتين لإثبات المتفاوتات المطلوبة.
4	بما أن : $\forall x\in IR\quad f(x)\geq 1$ و $f(-1)=\dfrac{2-4+3}{1-2+2}=1$ فإن : $\forall x\in IR\quad f(x)\geq f(-1)$ بالتالي 1 هو القيمة الدنوية المطلقة للدالة f في العدد -1
5	نفترض أن 2 هي قيمة قصوية للدالة f إذن يوجد $a\in IR$ حيث $f(a)=2$ منه : $\dfrac{2a^2+4a+3}{a^2+2a+2}=2$ منه : $2a^2+4a+3=2a^2+4a+4$ منه : $3=4$ و هذا غير ممكن، بالتالي 2 ليست قيمة قصوية للدالة f
	رغم أن جميع صور الدالة f أصغر من 2 ، فهذه الأخيرة لا تمثل قيمة قصوية، لأن من شروط ذلك أن تكون القيمة القصوية صورة عدد ينتمي لمجموعة التعريف.

	تمرين 4 : $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{3}{\sqrt{x}}$	
1	$D_f=\{x\in IR/\ x\geq 0\ \ et\ \ x>0\}=]0;+\infty[$	
2	لنبين أن 2 هي القيمة الدنوية المطلقة للدالة f لدينا: $\forall x\in]0;+\infty[\ \ f(x)-2=\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{3}{\sqrt{x}}-2=\frac{x+9-6\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x})^2-2\times\sqrt{x}\times 3+3^2}{3\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x}-3)^2}{3\sqrt{x}}\geq 0$ منه : $\forall x\in]0;+\infty[\ \ f(x)\geq 2$ و بما أن : $f(9)=\frac{3}{3}+\frac{3}{3}=1+1=2$ فإن : $\forall x\in]0;+\infty[\ \ f(x)\geq f(9)$ بالتالي 2 هي القيمة الدنوية المطلقة للدالة f	
	القيمة التي تكون صورتها هي القيمة القصوية هي التي تجعل الفرق ينعدم، بمعنى في حالتنا نحل المعادلة $\frac{(\sqrt{x}-3)^2}{3\sqrt{x}}=0$ في ورقة للبحث و سنجد $x=9$	