عموميـــــات حول الـــدوال

تمارين

تمرين 1

حدد مجموعة تعريف الدوال التالية :

$f(x)=\dfrac{4|x|+3}{x^2+4x+4}$ ، $g(x)=\dfrac{x^3-5}{2|x-3|-8}$ ، $h(x)=\dfrac{6+x^4}{x-\frac{1}{x}}$ ، $p(x)=\dfrac{5-|x|}{|x|+7}$

$q(x)=\dfrac{(5-x)(2-x)}{x^2+x-6}$ ، $k(x)=\dfrac{5-|x|}{x^2-3x+4}$ ، $t(x)=\dfrac{5-\sin(x)}{2\sin(x)-1}$ ، $m(x)=\sqrt{3-|x-4|}$

$r(x)=\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x-2}}$ ، $l(x)=\sqrt{x^3-8}+\dfrac{1-x}{|x+1|-|x-7|}$ ،

تمرين 2

ادرس زوجية الدوال التالية :

$f(x)=\dfrac{x^3}{|x|+5}$ ، $g(x)=\dfrac{\cos(x)}{x^4+x^2+1}$ ، $h(x)=\dfrac{\sin(x)}{x^3-1}$ ، $p(x)=|x|+|x+1|+|x-1|$ ،

$k(x)=\dfrac{\sqrt{|x-2|}+\sqrt{|x+2|}}{x^4-1}$

تمرين 3

نعتبر الدالة : $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}$

1- بين أن : $\forall x\in IR \quad x^2+2x+2>0$

2- حدد D_f

3- بين أن $\forall x\in IR \quad 1\leq f(x)<2$

تمرين 4

نعتبر الدالة : $f(x)=|x|+\dfrac{1}{|x|}$

1- حدد D_f

2- بين أن f مصغورة بالعدد 2

3- هل تقبل f قيمة دنوية ؟ علل جوابك

تمرين 5

أوجد جدول تغيرات الدوال التالية ثم أنشئ تمثيلها المبياني في م.م.م :

$f(x)=x^2+4x-1$ ، $g(x)=-2x^2+6x+1$ ، $h(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$ ، $k(x)=\dfrac{x}{x+2}$

$p(x)=\sqrt{x-2}$ ، $q(x)=-2x^3$

تمرين 6

حدد $(f\circ g)(x)$ و $(g\circ f)(x)$ في كل حالة مما يلي :

$\begin{cases} f(x)=2x+1 \\ g(x)=x^2-1 \end{cases}$ ، $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+1}{x} \\ g(x)=\dfrac{2x}{x-3} \end{cases}$ ، $\begin{cases} f(x)=\sqrt{1+x^2} \\ g(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2} \end{cases}$ ، $\begin{cases} f(x)=\sqrt{1+x^2} \\ g(x)=\sqrt{x^2-1} \end{cases}$

تمرين 7

نعتبر الدوال : $f(x)=x^2+4x+1$ و $g(x)=\sqrt{x+4}$ و $h(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

1- حدد Df و Dg و Dh

2- بين أن f مصغورة بـ -3

3- بين أن h مصغورة بـ 1

4- اعط جدول تغيرات الدالتين f و g

5- تحقق أن : $h=g\circ f$

6- ادرس رتابة الدالة h على $]-\infty;-2]$ و $[-2;+\infty[$

تمرين 8

نضع : $f(x)=x^2-4x+3$ و $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$

1- أ- ما هي طبيعة المنحنى Cf ؟

ب- حدد نقطتي تقاطع Cf و محور الأفاصيل

ج- أنشئ Cf في معلم متعامد ممنظم

2- أنشئ Cg في المعلم السابق

3- لتكن (E) المعادلة التالية : $x^3-5x^2+7x-4=0$

أ- بين أن المعادلة (E) تكافئ : $f(x)=g(x)$

ب- استنتج مبيانيا عدد حلول المعادلة (E)

تمرين 9

نعتبر الدالتين : $f(x)=x^2-x$ و $g(x)=\sqrt{|x|}$ و المستقيم $(\Delta):\ y=-2x+2$

-1

أ- اعط جدول تغيرات الدالتين f و g (لا حظ أن g زوجية)

ب- أنشئ في نفس المعلم (C_f) و (C_g) و (Δ)

-2 حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $\sqrt{|x|}+2x=2$

-3 حدد جبريا إحداثيثي نقط تقاطع (C_f) و (Δ)

-4 أ-حل مبيانيا المتراجحات التالية : $g(x)\leq 3$ ، $g(x)\geq 2$ ، $-2x+2<f(x)<2$

ب- حدد مبيانيا صور المجالات : $\left[0;\frac{1}{4}\right[$ و $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ بالدالة g وصور $[-2;1]$ و $[2;+\infty[$ و $]-\infty;0]$ بالدالة f

-5 حدد تغيرات الدالة $h(x)=x-\sqrt{x}$ على مجموعة تعريفها (اكتب h على شكل مركب دالتين)

عموميـــــــــات حول الدوال

حلــول

تمرين 1

$$f(x)=\frac{4|x|+3}{x^2+4x+4}$$

$Df=\{x\in IR \,/\, x^2+4x+4\neq 0\}$

$Df=\{x\in IR \,/\, (x+2)^2\neq 0\}$

$Df=\{x\in IR \,/\, x+2\neq 0\}$

$Df=\{x\in IR \,/\, x\neq -2\}$

$Df=]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$

$$g(x)=\frac{x^3-5}{2|x-3|-8}$$

$Dg=\{x\in IR/ 2|x-3|-8\neq 0\}$

$Dg=\{x\in IR/ |x-3|\neq 4\}$

$Dg=\{x\in IR/ x-3\neq 4 \;\; et \;\; x-3\neq -4\}$

$Dg=\{x\in IR/ x\neq 7 \;\; et \;\; x\neq -1\}$

$Dg=]-\infty,-1[\cup]-1,7[\cup]7,+\infty[$

$$h(x)=\frac{6+x^4}{x-\frac{1}{x}}$$

$Dh=\left\{x\in IR \,/\, x\neq 0 \;\; et \;\; x-\frac{1}{x}\neq 0\right\}$

$Dh=\left\{x\in IR \,/\, x\neq 0 \;\; et \;\; x\neq \frac{1}{x}\right\}$

$Dh=\{x\in IR \,/\, x\neq 0 \;\; et \;\; x^2\neq 1\}$

$Dh=\{x\in IR \,/\, x\neq 0 \;\; et \;\; x\neq 1 \;\; et \;\; x\neq -1\}$

$Dh=]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$

$$p(x)=\frac{5-|x|}{|x|+7}$$

$Dp=\{x\in IR \,/\, |x|+7\neq 0\}$

$Dp=\{x\in IR \,/\, |x|\neq -7\}$

$Dp=IR$

لأن العبارة $|x|\neq -7$ صحيحة لكل x من IR و ذلك

لكون $|x|\geq 0$ بينما $-7<0$

$$q(x)=\frac{(5-x)(2-x)}{x^2+x-6}$$

$Dq=\{x\in IR \,/\, x^2+x-6\neq 0\}$

محددة الحدودية x^2+x-6 هي :

$\Delta=1^2-4\times 1\times(-6)=1+24=25>0$

حلا المعادلة $x^2+x-6=0$ هما :

$x_2=\frac{-1-5}{2}=-3$ و $x_1=\frac{-1+5}{2}=2$

منه :

$Dq=\{x\in IR \,/\, x\neq 2 \;\; et \;\; x\neq -3\}$

$Dq=]-\infty,-3[\cup]-3,2[\cup]2,+\infty[$

$$k(x)=\frac{5-|x|}{x^2-3x+4}$$

$Dk=\{x\in IR/ x^2-3x+4\neq 0\}$

محددة الحدودية x^2-3x+4 هي :

$\Delta=(-3)^2-4\times 1\times 4=9-16=-7<0$

إذن ليس للمعادلة $x^2-3x+4=0$ حل في IR

أي أن العبارة $x^2-3x+4\neq 0$ صحيحة لكل x من IR

بالتالي : $Dk=IR$

تمرين 1

$$t(x)=\frac{5-\sin(x)}{2\sin(x)-1}$$

$$Dt=\{x\in IR\ /\ 2\sin(x)-1\neq 0\}$$

$$Dt=\left\{x\in IR\ /\ \sin(x)\neq\frac{1}{2}\right\}$$

$$Dt=\left\{x\in IR\ /\ \sin(x)\neq\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$Dt=\left\{x\in IR\ /\ x\neq\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \ et\ \ x\neq\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi; k\in Z\right\}$$

$$Dt=\left\{x\in IR\ /\ x\neq\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \ et\ \ x\neq\frac{5\pi}{6}+2k\pi; k\in Z\right\}$$

$$Dt=IR\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ /\ k\in Z\right\}$$

$$m(x)=\sqrt{3-|x-4|}$$

$$Dm=\{x\in IR\ /\ 3-|x-4|\geq 0\}$$

$$Dm=\{x\in IR\ /\ |x-4|\leq 3\}$$

$$Dm=\{x\in IR\ /\ -3\leq x-4\leq 3\}$$

$$Dm=\{x\in IR\ /\ 1\leq x\leq 7\}$$

$$Dm=[1,7]$$

$$r(x)=\frac{x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x-2}}$$

$$Dr=\{x\in IR\ /\ x\geq 0\ \ et\ \ x^2+x-2\geq 0\}$$

محددة الحدودية x^2+x-2 هي :

$$\Delta=1^2-4\times1\times(-2)=1+8=9>0$$

حلا المعادلة $x^2+x-6=0$ هما :

$x_2=\dfrac{-1-3}{2}=-2$ و $x_1=\dfrac{-1+3}{2}=1$

إذن :

x		-2	1	
x^2+x-2	+		-	+

منه:

$$Dr=[0,+\infty[\cap(]-\infty,-2]\cup[1,+\infty[)$$

$$Dr=[1,+\infty[$$

$$l(x)=\sqrt{x^3-8}+\frac{1-x}{|x+1|-|x-7|}$$

$$Dl=\{x\in IR\ /\ x^3-8\geq 0\ et\ |x+1|-|x-7|\neq 0\}$$

$$Dl=\{x\in IR\ /\ x^3\geq 8\ et\ |x+1|\neq|x-7|\}$$

$$Dl=\left\{x\in IR\ /\ x\geq 2\quad et\quad \begin{matrix}x+1\neq x-7\\ x+1\neq 7-x\end{matrix}\right\}$$

$$Dl=\{x\in IR\ /\ x\geq 2\quad et\quad 1\neq -7\quad et\quad 2x\neq 6\}$$

$$Dl=\{x\in IR\ /\ x\geq 2\quad et\quad x\neq 3\}$$

$$Dl=[2,3[\cup]3,+\infty[$$

: لتحديد مجموعة التعريف يجب أن نبحث عن قيم x بحيث يكون : المقام غير منعدم – ما بداخل الجذر المربع موجب و هذا ما يؤدي غالبا إلى البحث عن حلول معادلة أو متراجحة.

تمرين 2

$$f(x)=\frac{x^3}{|x|+5}$$

-1
$$Df=\{x\in IR\,/\,|x|+5\neq 0\}$$
$$Df=\{x\in IR\,/\,|x|\neq -5\}$$
$$Df=IR$$

-2 لدينا : $x\in IR \Rightarrow -x\in IR$

-3
$$\forall x\in IR\ \ f(-x)=\frac{(-x)^3}{|-x|+5}$$
$$f(-x)=\frac{-x^3}{|x|+5}=-f(x)$$

$\boxed{\text{إذن } f \text{ دالة فردية}}$

$$g(x)=\frac{\cos(x)}{x^4+x^2+1}$$

-1
$$Dg=\{x\in IR\,/\,x^4+x^2+1\neq 0\}$$
$$Dg=\{x\in IR\,/\,(x^2)^2+(x^2)+1\neq 0\}\quad (\Delta<0)$$
$$Dg=IR$$

-2 لدينا : $x\in IR \Rightarrow -x\in IR$

-3
$$\forall x\in IR\ g(-x)=\frac{\cos(-x)}{(-x)^4+(-x)^2+1}$$
$$g(-x)=\frac{\cos(x)}{x^4+x^2+1}=g(x)$$

$\boxed{\text{إذن } g \text{ دالة زوجية}}$

$$h(x)=\frac{\sin(x)}{x^3-1}$$

-1
$$Dh=\{x\in IR\,/\,x^3-1\neq 0\}$$
$$Dh=\{x\in IR\,/\,x^3\neq 1\}$$
$$Dh=\{x\in IR\,/\,x\neq 1\}$$
$$Dh=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$$

-2 لدينا : $-1\in Dh$ لكن $-1\notin Dh$

$\boxed{\text{إذن } h \text{ ليست بدالة زوجية و لا فردية}}$

$$p(x)=|x|+|x+1|+|x-1|$$

-1 $Dp=IR$

-2 لدينا : $x\in IR \Rightarrow -x\in IR$

-3
$$\forall x\in IR\ p(-x)=|x|+|x+1|+|x-1|$$
$$p(-x)=|-x|+|-x+1|+|-x-1|$$
$$p(-x)=|x|+|1-x|+|-(x+1)|$$
$$p(-x)=|x|+|x-1|+|x+1|$$
$$p(-x)=p(x)$$

$\boxed{\text{إذن } p \text{ دالة زوجية}}$

$$k(x)=\frac{\sqrt{|x-2|}+\sqrt{|x+2|}}{x^4-1}$$

-1
$$Dk=\{x\in IR\,/\,x^4-1\neq 0\ et\,|x-2|\geq 0\ \ et\,|x+2|\geq 0\}$$
$$Dk=\{x\in IR\,/\,x^4\neq 1\}$$
$$Dk=\{x\in IR\,/\,x^2\neq 1\}$$
$$Dk=\{x\in IR\,/\,x\neq 1\ \ et\ \ x\neq -1\}$$
$$Dk=]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$$

-2 لدينا : $x\in Df \Rightarrow x\neq 1\ et\ x\neq -1 \Rightarrow -x\neq -1\ et\ -x\neq 1 \Rightarrow -x\in Df$

-3
$$\forall x\in IR\ k(-x)=\frac{\sqrt{|-x-2|}+\sqrt{|-x+2|}}{(-x)^4-1}=\frac{\sqrt{|-(x+2)|}+\sqrt{|x-2|}}{x^4-1}=\frac{\sqrt{|x+2|}+\sqrt{|x-2|}}{x^4-1}=k(x)$$

$\boxed{\text{إذن } k \text{ دالة زوجية}}$

تمرين 3

نعتبر الدالة : $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}$

-1 محددة الحدودية x^2+2x+2 هي : $\Delta=2^2-4\times1\times2=4-8=-4<0$

إذن للحدودية x^2+2x+2 نفس إشارة $a=1$ أي أنها موجبة قطعا لكل x من IR

-2 حدد

$D_f=\{x\in IR/\ x^2+2x+2\neq 0\}$

$D_f=IR$

-3 لدينا :

$$f(x)-1=\frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}-1=\frac{2x^2+4x+3-(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}=\frac{2x^2+4x+3-x^2-2x-2}{x^2+2x+2}$$

$$f(x)-1=\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}=\frac{(x+1)^2}{x^2+2x+2}\geq 0$$

و لدينا :

$$f(x)-2=\frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}-2=\frac{2x^2+4x+3-2(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}=\frac{2x^2+4x+3-2x^2-4x-4}{x^2+2x+2}$$

$$f(x)-2=\frac{-1}{x^2+2x+2}<0$$

(استعملنا السؤال الأول و ذلك لتحديد إشارة المقام)

بالتالي : $\boxed{\forall x\in IR\quad 1\leq f(x)<2}$

تمرين 4

نعتبر الدالة : $f(x)=|x|+\dfrac{1}{|x|}$

-1 حدد

$D_f=\{x\in IR/\ |x|\neq 0\}$

$D_f=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

-2 لدينا : $\forall x\in Df\qquad f(x)-2=|x|+\dfrac{1}{|x|}-2=\dfrac{|x|^2+1-2|x|}{|x|}=\dfrac{(|x|-1)^2}{|x|}\geq 0$

منه : $f(x)\geq 2\quad \forall x\in Df$ إذن f مصغورة بالعدد 2

-3 لدينا f مصغورة بالعدد 2 و لدينا : $f(1)=1+\dfrac{1}{1}=2$ ، إذن f تقبل قيمة دنوية في النقطة : $x=1$

تمرين 5

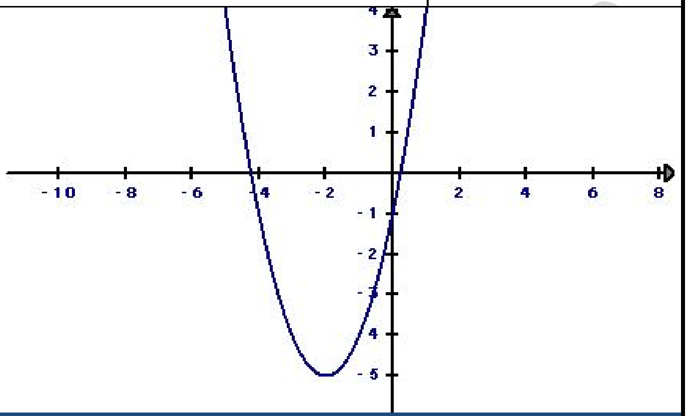
$f(x)=x^2+4x-1$

f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :

$$\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2}=-2$$

إذن :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-5	$\nearrow$



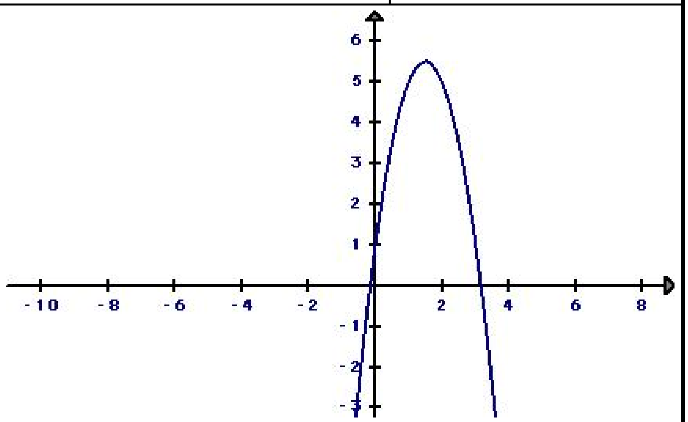
$f(x)=-2x^2+6x+1$

f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم

رأسه : $\frac{-}{2a}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$

إذن :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{11}{2}$	$\searrow$



: لاحظ أن رتابة الدالة تعتمد على إشارة المعامل a

تمرين 5

$$\boxed{f(x)=\frac{3x-1}{x-2}}$$

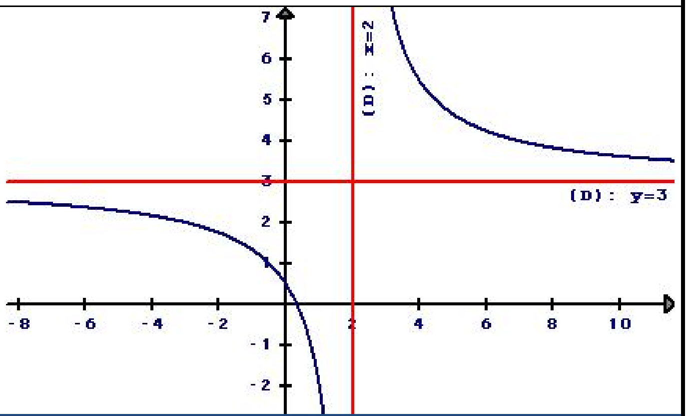
f عبارة عن دالة على شكل $\frac{ax+b}{cx+d}$ ، إذن تمثيلها المبياني

عبارة عن هذلول:

و لدينا : $f(x)-3=\frac{3x-1}{x-2}-3=\frac{3x-1-3x+6}{x-2}=\frac{5}{x-2}$

إذن الهذلول مركزه : $\Omega(2,3)$ و بما أن $5>0$ فالدالة تناقصية

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$



$$\boxed{f(x)=\frac{x}{x+2}}$$

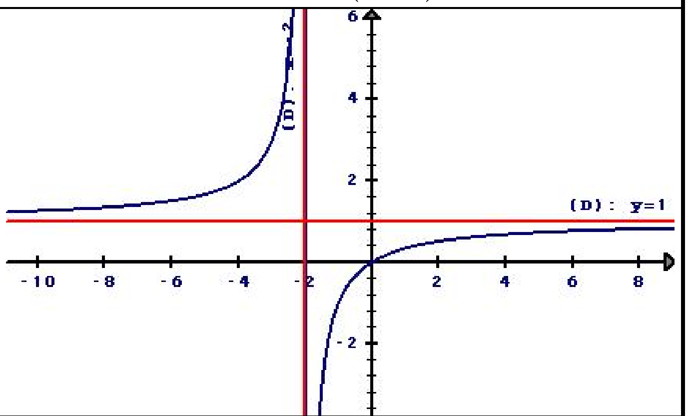
f عبارة عن دالة على شكل $\frac{ax+b}{cx+d}$ ، إذن تمثيلها المبياني

عبارة عن هذلول:

و لدينا : $f(x)-1=\frac{x}{x+2}-1=\frac{x-x-2}{x+2}=\frac{-2}{x+2}$

إذن الهذلول مركزه : $\Omega(-2,1)$ و بما أن $-2<0$ فالدالة تزايدية

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$



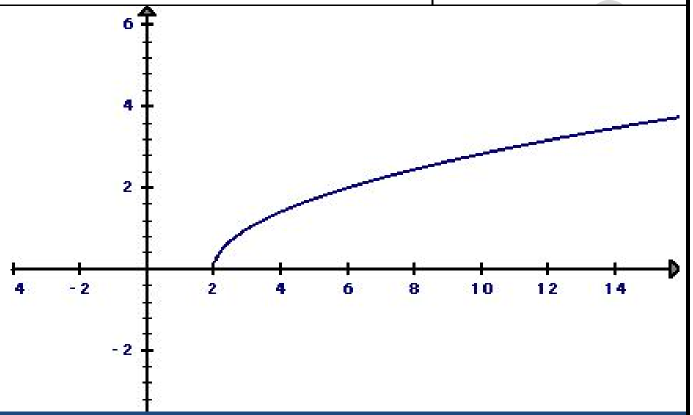
: لاحظ أنه لتحديد مركز الهذلول نحسب الفرق $\frac{ax+b}{cx+d}-\frac{a}{c}$

تمرين 5

$\boxed{f(x)=\sqrt{x-2}}$

f عبارة عن دالة على شكل $\sqrt{x+a}$، إذن :

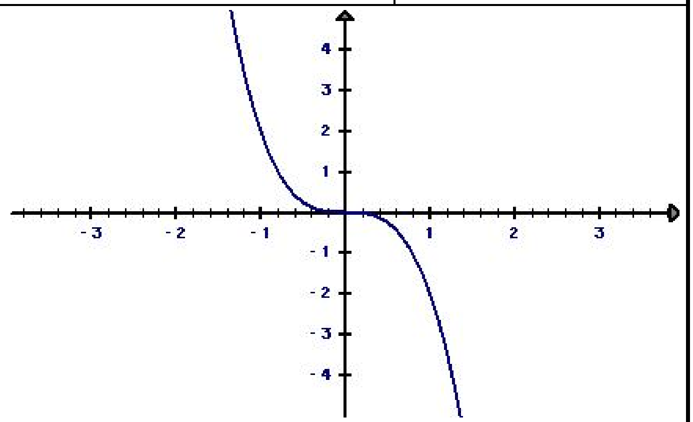
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$		0	$\nearrow$



$\boxed{f(x)=-2x^3}$

f عبارة عن دالة على شكل $a\,x^3$ و بما أن $a=-2<0$، فإن :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$



: لاحظ أن رتابة الدالة تعتمد على إشارة المعامل a

تمرين 6

$\begin{cases} f(x)=2x+1 \\ g(x)=x^2-1 \end{cases}$	$f\circ g(x)=f(g(x))=2g(x)+1$ $=2(x^2-1)+1$ $=2x^2-2+1$ $=2x^2-1$	$g\circ f(x)=g(f(x))=(f(x))^2-1$ $=(2x+1)^2-1$ $=4x^2+4x+1-1$ $=4x^2+4x$
$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+1}{x} \\ g(x)=\dfrac{2x}{x-3} \end{cases}$	$f\circ g(x)=f(g(x))=\dfrac{g(x)+1}{g(x)}$ $=\dfrac{\frac{2x}{x-3}+1}{\frac{2x}{x-3}}=\dfrac{\frac{2x+x-3}{x-3}}{\frac{2x}{x-3}}$ $=\dfrac{3x-3}{x-3}\times\dfrac{x-3}{2x}=\dfrac{3x-3}{2x}$	$g\circ f(x)=g(f(x))=\dfrac{2f(x)}{f(x)-3}$ $=\dfrac{2\frac{x+1}{x}}{\frac{x+1}{x}-3}=\dfrac{\frac{2x+2}{x}}{\frac{x+1-3x}{x}}$ $=\dfrac{2x+2}{x}\times\dfrac{x}{-2x+1}=\dfrac{2x+2}{-2x+1}$
$\begin{cases} f(x)=\sqrt{1+x^2} \\ g(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2} \end{cases}$	$f\circ g(x)=f(g(x))=\sqrt{1+(g(x))^2}$ $=\sqrt{1+\left(\dfrac{x^2+3}{x^2}\right)^2}$ $=\sqrt{\dfrac{x^4+(x^2+3)^2}{x^4}}$ $=\sqrt{\dfrac{x^4+x^4+6x^2+9}{x^4}}$ $=\dfrac{\sqrt{2x^4+6x^2+9}}{x^2}$	$g\circ f(x)=g(f(x))=\dfrac{(f(x))^2+3}{(f(x))^2}$ $=\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2+3}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}$ $=\dfrac{1+x^2+3}{1+x^2}$ $=\dfrac{x^2+4}{x^2+1}$
$\begin{cases} f(x)=\sqrt{1+x^2} \\ g(x)=\sqrt{x^2-1} \end{cases}$	$f\circ g(x)=f(g(x))=\sqrt{1+(g(x))^2}$ $=\sqrt{1+x^2-1}=\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$	$g\circ f(x)=g(f(x))=\sqrt{(f(x))^2-1}$ $=\sqrt{1+x^2-1}=\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$

: سنلاحظ من خلال الأمثلة المقدمة أنه عموما يكون $f\circ g(x)\neq g\circ f(x)$ ، لكن يمكن أن نحصل على التساوي في بعض الحالات.

تمرين 7

$f(x)=x^2+4x+1$ و $g(x)=\sqrt{x+4}$ و $h(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

1

f دالة حدودية منه: $Df=IR$

$Dg=\{x\in IR/\ x+4\geq 0\}$
$Dg=\{x\in IR/\ x\geq -4\}$
$Dg=[-4;+\infty[$

$Dh=\{x\in IR/\ x^2+4x+5\geq 0\}$
$\Delta=16-20=-4<0$
منه : $Dh=IR$

2

لنبين أن : $\forall x\in IR\quad f(x)\geq -3$

لدينا : $\forall x\in IR\quad f(x)-(-3)=x^2+4x+1+3=x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0$

بالتالي : $\forall x\in IR\quad f(x)\geq -3$

3

لنبين أن : $\forall x\in IR\quad h(x)\geq 1$

لدينا : $\forall x\in IR\quad h^2(x)-1^2=x^2+4x+5-1=x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0$

إذن : $\forall x\in IR\quad h^2(x)\geq 1$ و بما أن : $\forall x\in IR\quad h(x)\geq 0$ فإن : $\forall x\in IR\quad h(x)\geq 1$

4

f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه : $\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2}=-2$

إذن :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$

g عبارة عن دالة على شكل $\sqrt{x+a}$، إذن :

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$g(x)$		0	$\nearrow$

5

لدينا : $\forall x\in IR\quad g\circ f(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)+4}=\sqrt{x^2+4x+1+4}=\sqrt{x^2+4x+5}=h(x)$

6

رتابة الدالة h على $]-\infty;-2]$

- لدينا f تناقصية على $]-\infty;-2]$
- لدينا $f(]-\infty;-2])=[f(-2);+\infty[=[-3;+\infty[$
- لدينا g تزايدية على $[-3;+\infty[$

إذن h تناقصية على $]-\infty;-2]$

رتابة الدالة h على $[-2;+\infty[$

- لدينا f تزايدية على $[-2;+\infty[$
- لدينا $f([-2;+\infty[)=[f(-2);+\infty[=[-3;+\infty[$
- لدينا g تزايدية على $[-3;+\infty[$

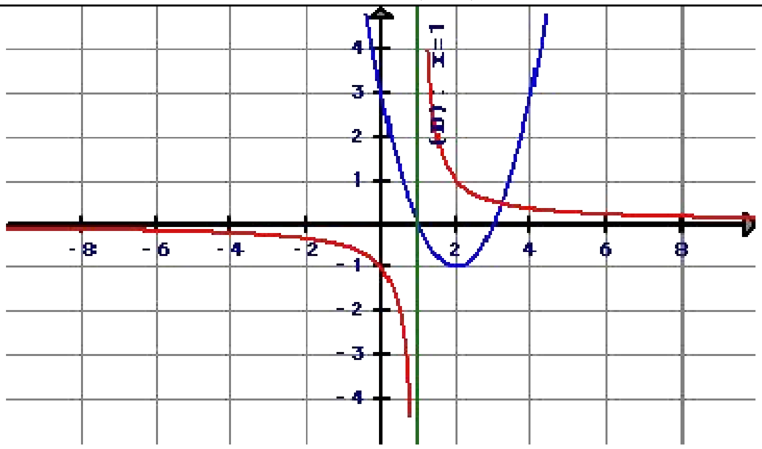
إذن h تزايدية على $[-2;+\infty[$

: لتحديد رتابة المركب $p\circ q(x)$ على مجال I ، نتبع 3 مراحل:

1- ندرس رتابة $q(x)$ على I 2- نحسب J صورة I بالدالة $q(x)$ 3- ندرس رتابة الدالة $p(x)$ على المجال J

و في الأخير نحدد رتابة المركب انطلاقا من نتائج المرحلتين الأولى و الثالثة مثل قاعدة إشارة جذاء

تمرين 8

		$f(x)=x^2-4x+3$ و $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$
1	أ	f دالة حدودية من الدرجة الثانية إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم
	ب	لنحدد نقطتي تقاطع Cf و محور الأفاصيل، أي لنحل المعادلة : $f(x)=0$ أي $x^2-4x+3=0$ لدينا $\Delta=16-12=4>0$ منه : $x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=\dfrac{4+2}{2}=3 \ ou \ x=\dfrac{4-2}{2}=1$ بالتالي : Cf يتقاطع مع محور الأفاصيل في النقطتين : $A(1;0)$ و $B(3;0)$
	ج	 Cf شلجم رأسه $E(1,\ f(1))$ منه :
2		Cg عبارة عن هذلول مركزه $F(1,0)$ و مقارباه هما المستقيمان : $(D_1):\ x=1$ و $(D_2):\ y=0$ (انظر الشكل السابق)
3	أ	بما أن العدد 1 ليس حلا للمعادلة (E) ($1-5+7-4=-1\neq 0$) فإن : لكل $x\neq 1$: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-4x+3=\dfrac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)(x^2-4x+3)=1$ $\Leftrightarrow x^3-4x^2+3x-x^2+4x-3-1=0 \Leftrightarrow x^3-5x^2+7x-4=0$
	ب	بما أن Cf و Cg يتقاطعان في نقطة وحيدة ، فإن المعادلة (E) تقبل حلا و حيدا
		: في السؤال الأخير غير مطلوب تحديد الحل أو الحلول،فقط عدد الحلول إن وجدت.

تمرين 9

$f(x)=x^2-x$ و $g(x)=\sqrt{|x|}$ و $(\Delta):\ y=-2x+2$

1

أ

f **عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :**

$$\frac{-b}{2a}=\frac{-(-1)}{2}=\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$\frac{-1}{4}$	↗

لدينا : $Dg=\{x\in IR/\ |x|\geq 0\}=IR$

و $\forall x\in IR\ \ g(-x)=\sqrt{|-x|}=\sqrt{|x|}=g(x)$

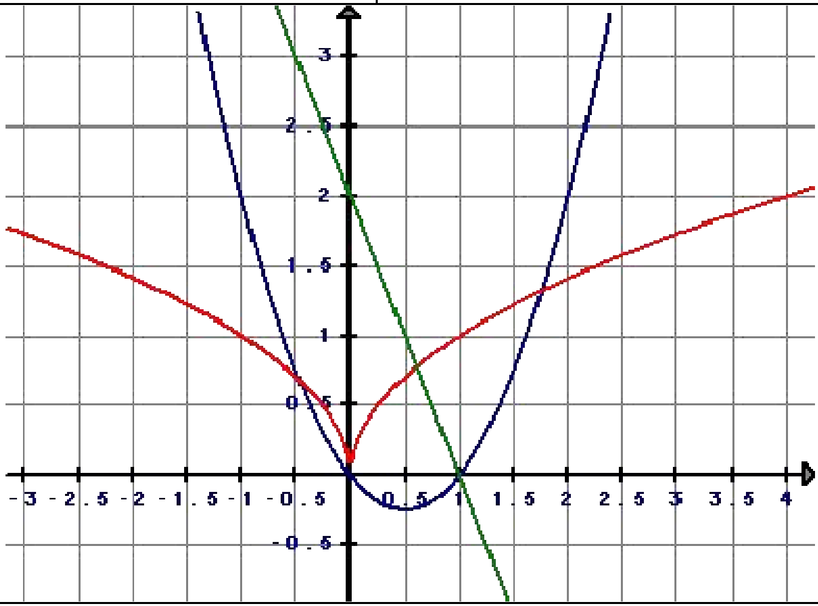
إذن : g **دالة زوجية**

من جهة أخرى : $\forall x\in IR^+\ \ g(x)=\sqrt{x}$

إذن جدول تغيراتها هو :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	↘	0	↗

ب



2

المعادلة $\sqrt{|x|}+2x=2$ **تكافئ** $g(x)=-2x+2$

مبيانيا نجد أن Cg **و** (Δ) **يتقاطعان في نقطة واحدة، إذن المعادلة السابقة تقبل حلا وحيدا.**

3

لنحدد جبريا إحداثيتي نقط تقاطع (C_f) **و** (Δ)

من أجل ذلك نحل أولا المعادلة : $f(x)=-2x+2$ **أي :** $x^2-x=-2x+2$ **أي :** $x^2-x+2x-2=0$

أي $x^2+x-2=0$ **، لدينا:** $\Delta=1+8=9$ **منه :** $x=\frac{-1+3}{2}=1$ **أو** $x=\frac{-1-3}{2}=-2$

إذن (C_f) **و** (Δ) **يتقاطعان في النقطتين :** $E(1,\ f(1))$ **و** $F(-2,\ f(-2))$ **أي :** $\boxed{E(1,0)\ \text{و}\ F(-2,6)}$

4

أ

مبيانيا نجد أن:

حل المتراجحة $g(x)\leq 3$ **هو :** $S=[-9;9]$

و حل المتراجحة $g(x)\geq 2$ **هو :** $S=]-\infty,-4]\cup[4,+\infty[$

و حل المتراجحة $-2x+2<f(x)<2$ **هو :** $S=(]-\infty,-2]\cup[1,+\infty[)\cap[-1,2]=[1;2]$

ب

$g\left(\left[0;\frac{1}{4}\right[\right)=\left[0;\frac{1}{2}\right[$ **و** $g\left(\left[\frac{1}{4};+\infty\right[\right)=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

$f([-2;1])=\left[\frac{-1}{4};6\right]$ **و** $f([2;+\infty[)=[2;+\infty[$

و $f(]-\infty;0])=[0;+\infty[$

تمرين 9

<table>
<tr><td>5</td><td colspan="2">لدينا : $Dh = IR^+$ و $\forall x \in IR^+ \quad h(x) = x - \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} = f(\sqrt{x}) = f(g(x)) = f \circ g(x)$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>رتابة الدالة h على $\left[0;\frac{1}{4}\right[$
📖 لدينا g تزايدية على $\left[0;\frac{1}{4}\right[$
📖 لدينا $g\left(\left[0;\frac{1}{4}\right[\right) = \left[0;\frac{1}{2}\right[$
📖 لدينا f تناقصية على $\left[0;\frac{1}{2}\right[$
إذن h تناقصية على $\left[0;\frac{1}{4}\right[$</td><td>رتابة الدالة h على $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$
📖 لدينا g تزايدية على $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$
📖 لدينا $g\left(\left[\frac{1}{4};+\infty\right[\right) = \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$
📖 لدينا f تزايدية على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$
إذن h تزايدية على $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$</td></tr>
<tr><td colspan="3">: بعض المراحل تم تجاوزها إما لكونها واضحة أو لكونها تتطلب شروحات كثيرة</td></tr>
</table>