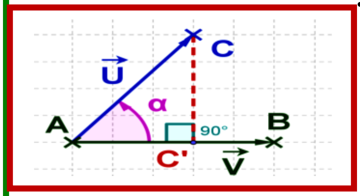
درس : الجداء السلمي في المستوى وتطبيقاته

I. تذكير:

01. تعاريف:

1. $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان من المستوى حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و الذي يرمز له ب: $\vec{u}.\vec{v}$ هو
   1. إذا كان $\vec{v}=\vec{0}$ أو $\vec{u}=\vec{0}$ فإن $\vec{u}.\vec{v}=0$.
   2. إذا كان $\vec{v}\neq\vec{0}$ و $\vec{u}\neq\vec{0}$ و H المسقط العمودي ل C على (AB) (مع $A\neq B$ لأن $\vec{u}\neq\vec{0}$) فإن:



   أ- $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AH$ حيث $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ لهما نفس الاتجاه .
   ب- $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AH$ حيث $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ لهما اتجاهين متعاكسين.
2. $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2=\overrightarrow{AB}^2$ يسمى المربع السلمي ل $\overrightarrow{AB}$ أو ل $\vec{u}$.
3. العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$ يسمى منظم المتجهة $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ ونرمز له ب $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}$ أو $\|\overrightarrow{AB}\|=AB$. و $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$

02. خاصيات الجداء السلمي:

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متجهات من المستوى حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ و α عدد حقيقي .

1. الصيغة المثلثية للجداء السلمي: (مع $\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ و $\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$) . نضع $\overline{(\vec{u},\vec{v})}=\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}\equiv\alpha\ (2\pi)$: لدينا
   - $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos\alpha$
   - أو أيضا : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos\alpha$ (مع $\vec{v}\neq\vec{0}$ و $\vec{u}\neq\vec{0}$)
2. تماثلية الجداء السلمي : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$.
3. خطانية الجداء السلمي :

$$\begin{cases}(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}\\ \vec{w}.(\vec{u}+\vec{v})=\vec{w}.\vec{u}+\vec{w}.\vec{v}\\ (\alpha\vec{u}).\vec{v}=\vec{u}.(\alpha\vec{v})=\alpha\times(\vec{u}.\vec{v})\end{cases}$$

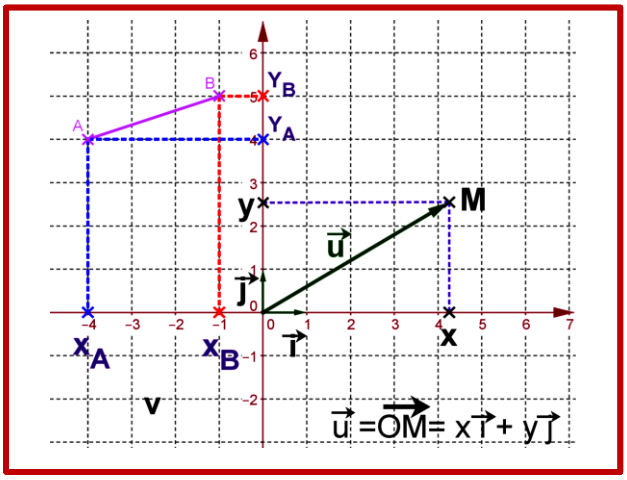
4. موجبة الجداء السلمي : $\vec{u}^2\geq 0$.
5. الجداء السلمي غير نا ئ : $\vec{u}.\vec{u}=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$.
6. تعامد متجهتان : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين ($\vec{u}\perp\vec{v}$) يعني $\vec{u}.\vec{v}=0$.

03. الأساس و المعلم (المتعامد الممنظم المباشر)

1. $B=(\vec{i},\vec{j})$ أساس في المستوى $(\mathcal{P})$ (أي $\vec{i}$ و $\vec{j}$ غير مستقيمتين) و O نقطة من $(\mathcal{P})$.
2. $B=(\vec{i},\vec{j})$ يسمى أساس متعامد ممنظم يعني $\vec{i}.\vec{j}=0$ و $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$. وفي هذه الحالة $R=(O,\vec{i},\vec{j})$ يسمى معلم متعامد ممنظم .
3. $B=(\vec{i},\vec{j})$ يسمى أساس متعامد ممنظم مباشر يعني $B=(\vec{i},\vec{j})$ أساس متعامد ممنظم و $\overline{(\vec{i},\vec{j})}\equiv\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$
4. $R=(O,\vec{i},\vec{j})$ يسمى معلم متعامد ممنظم مباشر (م.م.م.م) يعني $B=(\vec{i},\vec{j})$ أساس متعامد ممنظم مباشر .

II. الصيغة التحليلية للجداء السلمي ومنظم متجهة في م.م.م.م :

A. الصيغة التحليلية ل : $\vec{u}.\vec{v}$ و $\|\vec{u}\|$ و AB .



01. نشاط :

فيما تبقى من الدرس $R=(O,\vec{i},\vec{j})$ م.م.م.م (معلم متعامد ممنظم مباشر).

$\vec{u}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}(x',y')=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ متجهتين من $(\mathcal{P})$

1) أحسب $\vec{u}.\vec{v}$ بدلالة x و y و x' و y' ثم $\|\vec{u}\|$ بدلالة x و y.

2) أعط شرط ضروري وكافي لتعامد $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بدلالة x و y و x' و y'

أحسب المسافة: AB مع $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$.

3) أعط الخاصية:

02. خاصية :

$\vec{u}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}(x',y')=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ متجهتان من المستوى $(\mathcal{P})$.

1. $\vec{u}.\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=(x,y).(x',y')=xx'+yy'$.

2. $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

3. $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B^2-x_A^2)+(y_B^2-y_A^2)}$ مع $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$

4. $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$

03. مثال :

1) أحسب : $\vec{u}.\vec{v}$ و $\|\vec{u}\|$ و $\|\vec{v}\|$ و AB. مع $\vec{u}(2,-4)$ و $\vec{v}(-1,2)$ و $A(1,0)$ و $B(-1,0)$.

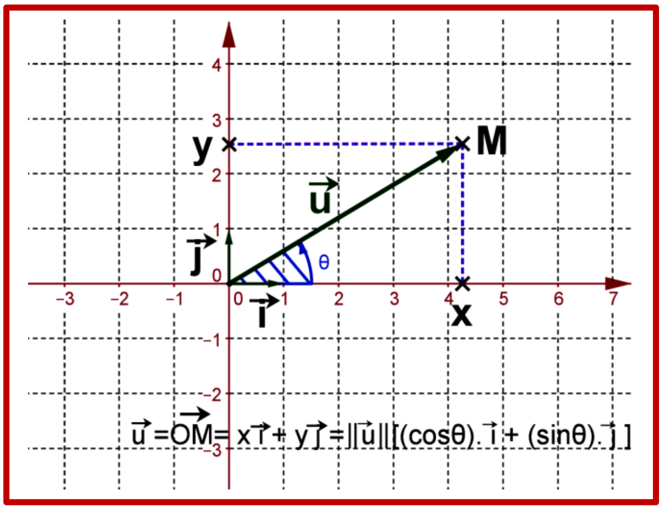
2) حدد المتجهات $\vec{v}(x,y)$ الواحدية و المتعامدة مع $\vec{u}(2,-4)$. ($\vec{v}$ واحدية يكافئ $\|\vec{v}\|=1$).

3) أ- بين أن المثلث ABC قائم الزاوية في A حيث: $A(1,3)$ و $B(3,1)$ و $C(-3,-1)$.

ب – حدد متجهة موجهة للارتفاع المار من A للمثلث ABC

B. إحداثيتا متجهة في أساس م.م - المعلمة القطبية

Coordonnées d'1 vecteur - Repérage polaire



01. نشاط

$\vec{u}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}$ متجهة من المستوى $(\mathcal{P})$. و M نقطة من $(\mathcal{P})$

حيث $\overrightarrow{OM}=\vec{u}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $(\overline{\vec{i},\vec{u}})\equiv\theta\ [2\pi]$

1) بين أن : $(\overline{\vec{u},\vec{j}})\equiv\frac{\pi}{2}-\theta\ [2\pi]$

2) أحسب $\vec{i}.\vec{u}$ و $\vec{j}.\vec{u}$ كل من هما بطريقتين مختلفتين .

3) استنتج أن : $x=\|\vec{u}\|\cos(\overline{\vec{i},\vec{u}})$ و $y=\|\vec{u}\|\sin(\overline{\vec{i},\vec{u}})$.

4) استنتج كتابة جديدة ل $\vec{u}$.

5) أعط الخاصية.

02. مفردات :

الزاوية : $(\overline{\vec{i},\vec{u}})$ تسمى الزاوية القطبية للمتجهة $\vec{u}$. θ يسمى قياس الزاوية القطبية للمتجهة $\vec{u}$.

03. خاصية:

$\vec{u}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}$ متجهة غير منعدمة من المستوى $(\mathcal{P})$. $(\overline{\vec{i},\vec{u}})\equiv\theta\ [2\pi]$ لدينا:

1. $x=\vec{i}.\vec{u}=\|\vec{u}\|\cos(\overline{\vec{i},\vec{u}})$ و $y=\vec{j}.\vec{u}=\|\vec{u}\|\sin(\overline{\vec{i},\vec{u}})$

2. $\vec{u}=\|\vec{u}\|\left(\left(\cos(\overline{\vec{i},\vec{u}})\right).\vec{i}+\sin(\overline{\vec{i},\vec{u}}).\vec{j}\right)$

C. متفاوتة كوشي شوارز- المتفاوتة المثلثية :

l'inégalité de Cauchy – Schwarz + l'inégalité triangulaire

01. نشاط :

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان من المستوى $(\mathcal{P})$.

1) بين أن : $|\vec{u}.\vec{v}|\le\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

2) بين أن : ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان) $\Leftrightarrow |\vec{u}.\vec{v}|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

3) أ - بين أن : $\|\vec{u}+\vec{v}\|\le\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$. ب – أعط الخاصية.

جواب:

1) نبين أن : $|\vec{u}.\vec{v}|\le\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

حالة 1 : $\vec{v}=\vec{0}$ أو $\vec{u}=\vec{0}$ فإن $\vec{u}.\vec{v}=0$ و $\|\vec{u}\|=0$ أو $\|\vec{v}\|=0$ إذن $|\vec{u}.\vec{v}|\le\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

حالة 2 : $\vec{v}\ne\vec{0}$ و $\vec{u}\ne\vec{0}$

لدينا:

$$\left|\cos(\overline{\vec{u},\vec{v}})\right|\le 1\Leftrightarrow\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\left|\cos(\overline{\vec{u},\vec{v}})\right|\le 1\times\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$$

$$\Leftrightarrow\left|\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos(\overline{\vec{u},\vec{v}})\right|\le\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$$

$$\Leftrightarrow|\vec{u}.\vec{v}|\le\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$$

ومنه : $|\vec{u}.\vec{v}|\le\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

2) بين أن : ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان) $\Leftrightarrow |\vec{u}.\vec{v}|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

نضع : $\left|\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos(\overline{\vec{u},\vec{v}})\right|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\ :\ (1)$

$$(1)\Leftrightarrow\left|\cos(\overline{\vec{u},\vec{v}})\right|=1$$

$$\Leftrightarrow\cos(\overline{\vec{u},\vec{v}})=1 \text{ أو } \cos(\overline{\vec{u},\vec{v}})=-1$$

$\Leftrightarrow \left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right) = 2k\pi$ أو $\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right) = \pi + 2k\pi$

$\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان

خلاصة : ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان) $\Leftrightarrow |\vec{u}.\vec{v}| = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

3) نبين أن : $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

حسب متفاوتة كوشي شوارز: $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$: (2)

$(2) \Leftrightarrow 2\times|\vec{u}.\vec{v}| \leq 2\times\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

$\Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

$\Leftrightarrow \left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 \leq \left(\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|\right)^2 \quad \left(\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2\right)$

$\Leftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \leq \left(\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|\right)^2$

خلاصة : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \leq \left(\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|\right)^2$

02. خاصية :

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان من المستوى $(\mathcal{P})$. لدينا:

1. $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$. (متفاوتة كوشي - شوارز)
2. ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان) $\Leftrightarrow |\vec{u}.\vec{v}| = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.
3. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \leq \left(\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|\right)^2$ (المتفاوتة المثلثية)

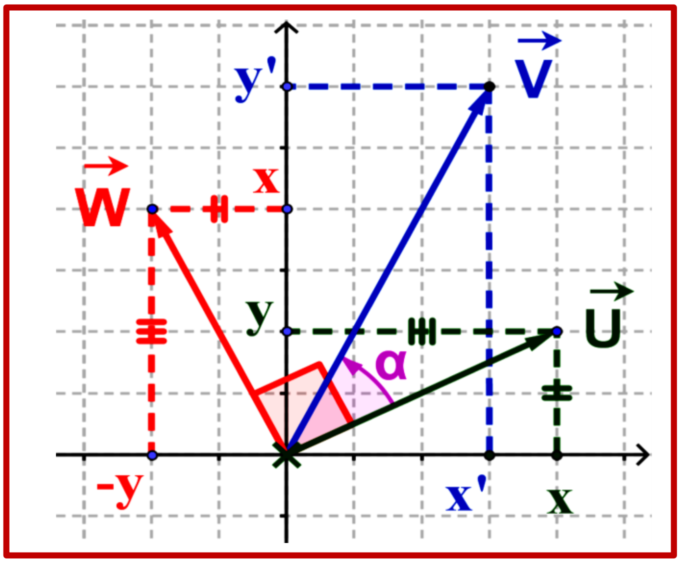
III. صيغة $\sin\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)$ و $\cos\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)$

A. صيغتي: $\sin\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)$ و $\cos\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)$:

01. نشاط :

$\vec{u}(x,y) = x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}(x',y') = x'\vec{i}+y'\vec{j}$ متجهتان غير منعدمتين من $(\mathcal{P})$. مع $\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right) \equiv \alpha \ (2\pi)$. المتجهة $\vec{w}(-y;x)$

نعتبر المتجهة : $\vec{w}(-y;x)$. أنظر الشكل :



1) أوجد $\cos\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)$ بدلالة x و y و x' و y'.

2) ا – أحسب $\vec{v}.\vec{w}$ و $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ ثم $\|\vec{u}\|$ و $\|\vec{w}\|$ ماذا تلاحظ ؟

ب - بين : $\left(\overline{\vec{v},\vec{w}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha \ (2\pi)$.

جواب : $\begin{cases} \overline{(\vec{u};\vec{w})} \equiv \overline{(\vec{u};\vec{v})} + \overline{(\vec{v};\vec{w})} : (2\pi) \\ \frac{\pi}{2} \equiv \alpha + \overline{(\vec{v};\vec{w})} : (2\pi) \end{cases}$.

ج – أعط الصيغة المثلثية ل $\vec{v}.\vec{w}$ ثم استنتج $\sin\alpha$. جواب : $\left(\sin\alpha = \frac{\vec{v}.\vec{w}}{\|\vec{u}\|\|\vec{w}\|}\right)$

ه- استنتج $\sin\alpha$ بدلالة $\det(\vec{u};\vec{v})$ و $\|\vec{u}\|$ و $\|\vec{v}\|$ ثم بدلالة x و y و x' و y'.. جواب : $\left(\sin\alpha = \frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}\right)$

02. خاصية :

$\vec{u}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ و $\vec{v}(x',y') = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ متجهتان غير منعدمتين من $(\mathcal{P})$. مع $\overline{(\vec{u},\vec{v})} \equiv \alpha\ (2\pi)$.

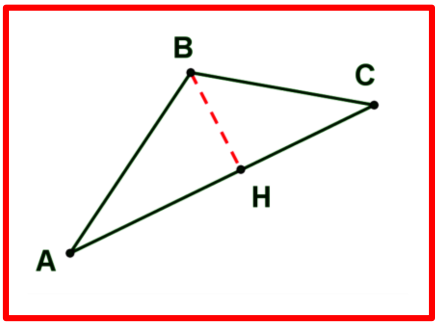
1. $\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$

2. $\sin\theta = \frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{xy'-yx'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$

B. مساحة مثلث :

01. نشاط :

نعتبر في المستوى $(\mathcal{P})$ مثلث ABC غير منبطح. H المسقط العمودي ل C على (AB) (مع $A \neq B$).



1) أعط المساحة S للمثلث ABC .

2) أعط المساحة S بدلالة $\left|\sin\left(\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}\right)\right|$.

3) أعط المساحة S بدلالة $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

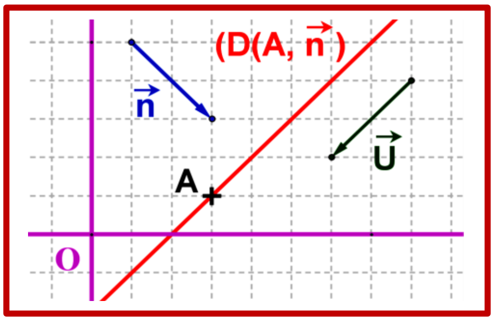
4) استنتج مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$

5) أعط الخاصية:

02. خاصية:

نعتبر في المستوى $(\mathcal{P})$ مثلث ABC ومتوازي الأضلاع $ABCD$.

- لدينا : S_{ABC} مساحة المثلث ABC هي : $S = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|$
- لدينا : S_{ABCD} مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$ هي : $S = \left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|$



IV. المستقيم في المستوى (دراسة تحليلية) :

A. متجهة منظمية على مستقيم vecteur normal:

01. نشاط :

$D(A,\vec{u})$ مستقيم من المستوى $(\mathcal{P})$. $\vec{n}$ متجهة من $(\mathcal{P})$.

ماذا تلاحظ ؟

02. تعريف :

> $D(A,\vec{u})$ مستقيم من المستوى $(\mathcal{P})$.
>
> كل متجهة $\vec{n}$ غير منعدمة من $(\mathcal{P})$ و متعامدة مع $\vec{u}$ تسمى متجهة منظمية على المستقيم $D(A,\vec{u})$.

03. ملحوظة :

1. $\vec{n}$ منظمية على مستقيم (D) كذلك $\alpha.\vec{n}$ منظمية على (D) مع $\alpha \neq 0$.
2. $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ منظميتان على (D) إذن $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ مستقيميتان.
3. $\vec{n}(a,b)$ منظمية على (D) يكافئ $\vec{u}(-b,a)$ موجهة ل (D).

B. مجموعة النقط M من $(\mathcal{P})$ حيث : $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

01. نشاط :

A نقطة من $(\mathcal{P})$ و $\vec{n}$ متجهة غير منعدمة .

حدد مجموعة النقط $M(x,y)$ من $(\mathcal{P})$ حيث $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

02. خاصية:

> مجموعة النقطة $M(x,y)$ من المستوى $(\mathcal{P})$ التي تحقق $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ هي المستقيم $D(A,\vec{n})$ المار من A و $\vec{n}$ متجهة منظمية عليه.

C. معادلة ديكارتية للمستقيم $D(A,\vec{n})$.

01. نشاط :

$D(A,\vec{n})$ مستقيم من $(\mathcal{P})$ حيث يمر من النقطة $A(x_A,y_A)$ و $\vec{n}(a,b)$ منظمية عليه. بين أن:

1) $M(x,y) \in D(A,\vec{n})$ فإن $ax+by+c=0$ مع تحديد c.

2) ندرس العكس : E مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوى $(\mathcal{P})$ التي تحقق $ax+by+c=0$ مع $(a,b)\neq(0,0)$ فإن E هي المستقيم $D(A,\vec{n})$.

جواب:

1) نبين أن: $ax+by+c=0$ و نحدد c:

$$M(x,y)\in D(A,\vec{n}) \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=0$$
$$\Rightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$$
$$\Rightarrow ax+by+c=0 \ \ (c=-ax_A-by_A)$$

خلاصة: $ax+by+c=0$; $(c=-ax_A-by_A)$.

2) ندرس العكس :

لدينا E مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوى $(\mathcal{P})$ التي تحقق $ax+by+c=0$ (1) مع $(a,b)\neq(0,0)$.

هل هذه المجموعة E مستقيم (D) حيث $\vec{n}(a,b)$ منظمية على (D).

هذه المجموعة E غير فارغة لأن $C\left(-\frac{c}{a},0\right)\in E$. (إذا افترضنا $a\neq 0$ أما إذا افترضنا $b\neq 0$ نأخذ $C'\left(0,-\frac{c}{b}\right)\in E$)

نعتبر نقطة $A(x_A,y_A)$ من E ومنه: ax_A+by_A+c (2)

من خلال فرق ل (1) و (2) نحصل على :

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$$
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}=0$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0 \text{ : إذن } \vec{n}\perp\overrightarrow{AM}$$

خلاصة : $M(x,y)$ نقطة من المستقيم (D) المار من A و متجهة منظمية عليه $\vec{n}(a,b)$.

02. مفردات :

المعادلة $ax+by+c=0$ تسمى المعادلة الديكارتية للمستقيم $D(A;\vec{n})$ المار من $A(x_A,y_A)$ و متجهة منظمية عليه $\vec{n}(a,b)$.

03. خاصية و تعريف :

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ نقطة من المستوى $(\mathcal{P})$ هي من المستقيم $D\left(A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix};\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)$ إذا و فقط إذا كان $ax+by+c=0$ مع $c=-ax_A-by_B$ و $(a,b)\neq(0,0)$. المعادلة $ax+by+c=0$ تسمى المعادلة الديكارتية ل $D(A,\vec{n})$.

04. ملاحظة :

المعادلة الديكارتية (D) : $ax+by+c=0$ متجهة منظمية على D هي $\vec{n}(a,b)$ ومتجهة موجهة له هي $\vec{u}(-b,a)$.

05. تطبيق:

1) أعط المعادلة الديكارتية للمستقيم $D\left(A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix};\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$.

2) نعتبر المثلث ABC حيث $A(2,1)$ و $B(0,1)$ و $C(-2,3)$

أ- حدد معادلة ديكارتية لواسط $[AB]$ ثم ل $[BC]$.

ب- حدد احداثيتي Ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

جواب :

1) نعطي المعادلة الديكارتية للمستقيم:

بما أن $\vec{n}(1,5)$ متجهة منظمية على D إذن المعادلة هي على شكل : $(D): 1x+5y+c=0$.

بما أن: $A(2,0)\in(D): 1\times2+5\times0+c=0$ إذن $c=-2$

خلاصة: معادلة ديكارتية هي: $(D): 1x+5y-2=0$.

2) معادلة الواسطان:

معادلة الواسط $[AB]$.

بما أن : (D) واسط $[AB]$ إذن: $(AB)\perp(D)$ و (D) يمر من $I(1,1)$ منتصف $[AB]$.

و منه : $M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0$$

ومنه : $(D): x-1=0$.

معادلة الواسط $[BC]$.

بما أن : (D') واسط $[BC]$ إذن: $(BC)\perp(D')$ و (D') يمر من $J(-1,2)$ منتصف $[BC]$.

و منه : $M(x;y)\in(D')\Leftrightarrow \overrightarrow{JM}.\overrightarrow{BC}=0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+1\\y-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow -2(x+1)+2(y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow -2x+2y-6=0$$

ومنه : $(D'): -x+y-3=0$

3) احداثيتي Ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC نعلم أن نقطة تلاقي الواسطات لمثلث هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث

و منه : $(1)\ : \Omega(x,y)\in(D)\cap(D')$

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=0\\-x+y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}$$ و منه : $\Omega(1,4)$.

خلاصة : $\Omega(1,4)$ هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث

D. شرط تعامد (D) و (D') :

01. نشاط : $D(A,\vec{u})$ و $D'(B,\vec{u'})$ مستقيمان من $(\mathcal{P})$

1) أوجد شرط ضروري و كافي حيث $(D)\perp(D')$.

2) نفس السؤال: $D(A,\vec{u})$ و $D'(B,\vec{u'})$ ($\vec{u}$ موجهة و $\vec{n}$ منظمية)

02. خاصية:

نعتبر المستقيمين $(D): ax+by+c=0$ و $(D'): a'x+b'y+c'=0$ حيث $\vec{n}(a,b)$ و $\vec{n'}(a',b')$ منظمتين على (D) و (D') على التوالي . $(D')\perp(D)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow aa'+bb'=0$.

01. مثال : $(D) : 2x+y-3=0$ أوجد معادلة ديكارتية ل $(D') : a'x+b'y+c'=0$ D' حيث $(D')\perp(D)$.

E. مسافة نقطة عن مستقيم :

01. نشاط :

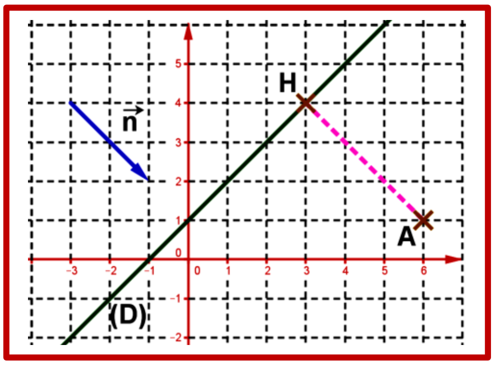
ما هي أقرب مسافة بين A و المستقيم (D)؟

02. تعريف :

$D(A,\vec{u})$ مستقيم من المستوى $(\mathcal{P})$ و A نقطة من $(\mathcal{P})$ حيث H المسقط العمودي ل A على (D) .

المسافة AH تسمى المسافة النقطة A عن (D) ونرمز لها ب : $d(A,(D))=d=AH$

03. نشاط :



$(D): ax+by+c=0$ مستقيم من المستوى $(\mathcal{P})$. A نقطة من $(\mathcal{P})$ حيث

$H(x_H,y_H)$ المسقط العمودي ل A على (D).

1) أ- بين أن : $c=-ax_H-by_H$.

ب - بين أن : $|\vec{n}.\overrightarrow{AH}|=|ax_A+by_A+c|$.

2) أ - بين أن: $|\vec{n}.\overrightarrow{AH}|=\|\vec{n}\|AH$.

ب - استنتج كتابة ل AH بدلالة a و b و c و x_A و y_A .

04. خاصية :

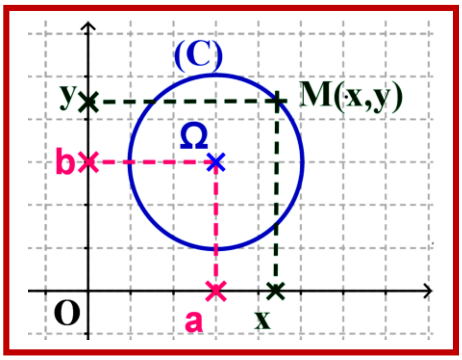
$(D) : ax+by+c=0$ مستقيم من المستوى $(\mathcal{P})$ و $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ نقطة من $(\mathcal{P})$. لدينا $d(A;D)=\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

05. مثال:

$(D'):-x+y-3=0$ و $A(2,5)$. لدينا: $d(A;D)=\dfrac{|-2+5-3|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=0$

V. الدائرة في المستوى – دراسة تحليلية –

A. معادلة ديكارتية لدائرة $C(\Omega(a,b);r)$:



01. نشاط :

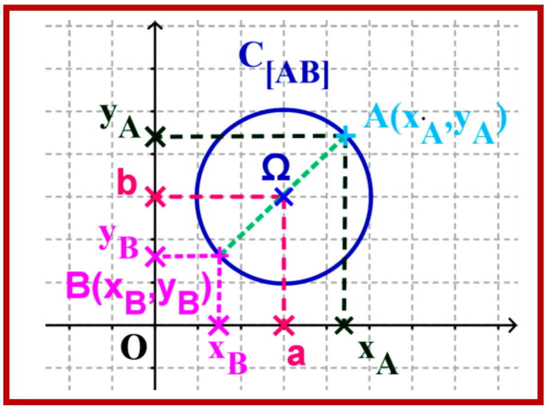
$\Omega(a,b)$ نقطة من $(\mathcal{P})$ و r من $\mathbb{R}^{+*}$.

أتمم التكافؤ الاتي مستعملا a و b و x و y .... $M(x,y)\in C(\Omega(a,b);r)\Leftrightarrow$

02. خاصية :

كل دائرة $C(\Omega(a,b);r)$ من $(\mathcal{P})$ لها معادلة ديكارتية على شكل: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ أو أيضا :

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ مع $c=a^2+b^2-r^2$.



03.مثال : مثال 1 : أوجد معادلة ديكارتية ل $C(\Omega(0,0);1)$.

مثال 2 : $A(1;0)$ و $B(-1;0)$ أوجد معادلة ديكارتية ل $C_{[AB]}$

B. معادلة ديكارتية لدائرة معرفة بأحد أقطارها :

01. نشاط :

$M(x;y)$ نقطة من $(\mathcal{P})$. $C_{[AB]}$ هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ مع $B\neq A$.

أوجد شرط ضروري وكافي ل (1) . $(1):\ M(x;y)\in C_{[AB]}$

02. خاصية :

> $M(x;y)\in C[A;B]\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ وهي تمثل معادلة ديكارتية لدائرة التي قطرها $[A;B]$ و نرمز لها ب: $C_{[AB]}$

03. مثال :

$A(1;0)$ و $B(-1;0)$ من $(\mathcal{P})$ أوجد معادلة ديكارتية ل $C_{[AB]}$

جواب : نجد معادلة ديكارتية ل $C_{[AB]}$:

$$M(x;y)\in C_{[A;B]}\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y-0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x+1\\y-0\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow x^2+y^2-1=0$$

خلاصة: $C_{[AB]}:x^2+y^2-1=0$

C. الدائرة المارة من 3 نقط غير مستقيمية:

خاصية :

> الدائرة المارة من ثلاث نقط A و B و C غير مستقيمية هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC حيث مركزها Ω تلاقي واسطاته و شعاعها هو $r=\Omega A$.

D. تمثيل بارا متري لدائرة :

01. نشاط :

$C(\Omega(a,b);r)$ دائرة من المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $(\overline{\vec{i},\overrightarrow{\Omega M}})\equiv\theta:(2\pi)$; $\theta\in\mathbb{R}$.

1) أحسب $\vec{i}.\overrightarrow{\Omega M}$; $\vec{J}.\overrightarrow{\Omega M}$.

2) ما هي إحداثيتي M بالنسبة للمعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$.

3) من خلال : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}$ بين : $\begin{cases}x=a+R\cos\theta\\y=b+R\sin\theta\end{cases}$.

02. خاصية :

> $C(\Omega(a,b);r)$ دائرة من المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $(\overline{\vec{i};\overrightarrow{\Omega M}})\equiv\theta:(2\pi)$; $\theta\in\mathbb{R}$.
>
> لدينا لكل $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ نقطة من $(\mathcal{P})$: $\begin{cases}x=a+R\cos\theta\\y=b+R\sin\theta\end{cases}$
>
> وهي تسمى تمثيل بارا متري للدائرة $C(\Omega(a;b);r)$.

03.مثال :

أعط تمثيل بارا متري للدائرة المثلثية المرتبطة بالمعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

F. دراسة مجموعة النقط : $\{M(x,y)/x^2+y^2+ax+by+c=0\}$

01.نشاط :

1) أوجد مجموعة النقط $M(x,y)$ من $(\mathcal{P})$ التي تحقق ما سبق .

2) أعط الخاصية.

02.خاصية:

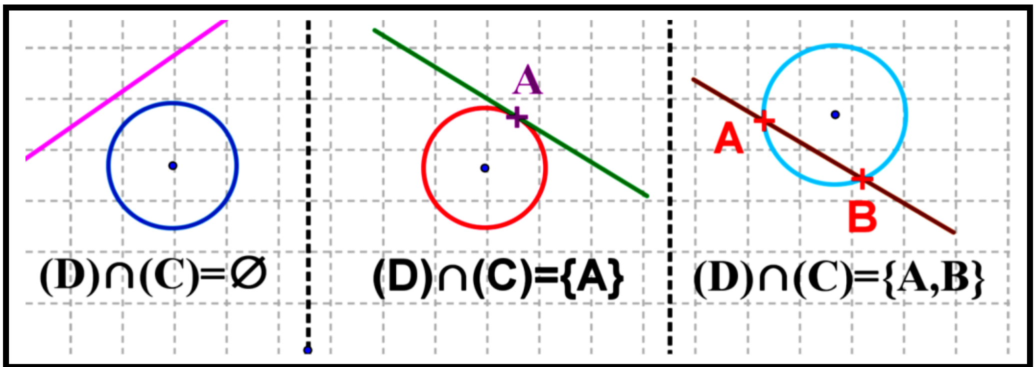
مجموعة النقط $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ من $(\mathcal{P})$ التي تحقق: $x^2+y^2+ax+by+c=0$ هي

- $A=a^2+b^2-4c<0$ ليس هناك نقطة $S=\varnothing$.
- $A=a^2+b^2-4c=0$ هي النقطة $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ أو مجموعة الحلول هي $S=\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)\right\}$
- $A=a^2+b^2-4c>0$ مجموعة الحلول هي الدائرة $S=(C)=C\left(\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right);r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}\right)$.

G. دراسة الأوضاع النسبية لدائرة ومستقيم:

01.نشاط:

أرسم الأوضاع النسبية ل (D) و (C) ثم أعط التعاريف و الخاصيات.



المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين A و B	المستقيم (D) مماس لدائرة (C) في نقطة A	المستقيم (D) خارج الدائرة (C)

02.تعاريف وخاصيات:

(D) مستقيم من المستوى $(\mathcal{P})$ و (C) دائرة من المستوى .Ω مركز الدائرة و r شعاعها .

1. (D) هو خارج الدائرة (C) يعني D و (C) ليس لهما نقطة مشتركة $(D)\cap(C)=\varnothing$.

خاصية: (D) هو خارج الدائرة (C) يكافئ $d(\Omega,(D))>r$

2. (D) و (C) يتقاطعان يعني (D) و (C) لهما نقطتين مشتركتين A و B. $(D)\cap(C)=\{A,B\}$.

خاصية: (D) و (C) يتقاطعان في A و B يكافئ $d(\Omega,(D))<r$

3. (D) مماس ل (C) يعني (D) و (C) لهما نقطة مشتركة هي A . $(D)\cap(C)=\{A\}$.

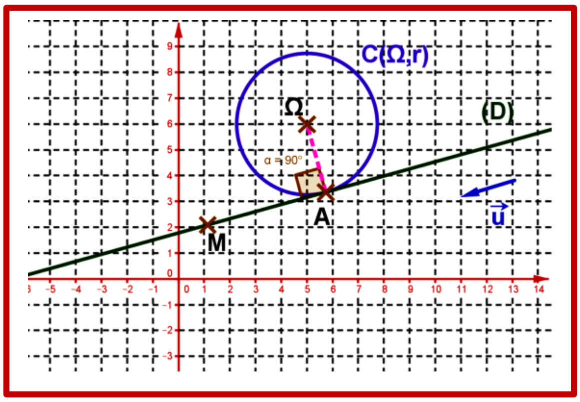
خاصية: (D) مماس ل (C) في A يكافئ $d(\Omega,(D))=r$

H. معادلة ديكارتية لمستقيم مماس لدائرة في نقطة معلومة من الدائرة:

01. نشاط:

نعتبر المستقيم $D(A;\vec{u})$ المماس ل $C(\Omega,r)$ في A حيث A من (C).

(أنظر الشكل)



1) أوجد الشرط الضروري و الكافي حيث نقطة $M(x,y)$ تنتمي ل $D(A;\vec{u})$.

2) استنتج معادلة $D(A;\vec{u})$ المماس ل $C(\Omega,r)$ في A

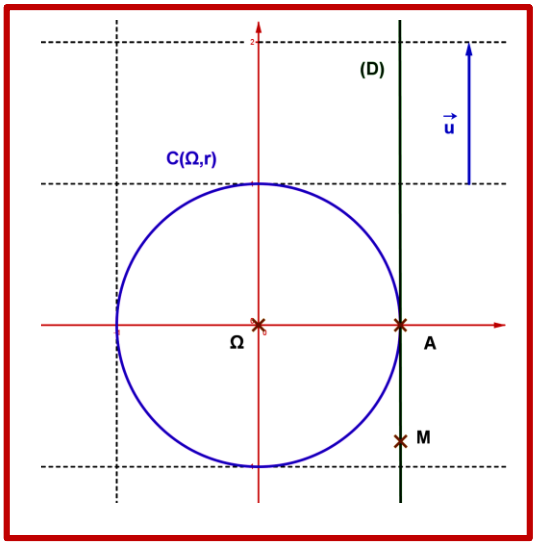
3) أعط الخاصية .

02. خاصية المعادلة الديكارتية للمماس في نقطة من (C)

معادلة ديكارتية للمماس $D(A;\vec{u})$ للدائرة $C(\Omega(a;b);r)$ في $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ من الدائرة (C) هي $\overrightarrow{\Omega A}.\vec{u}=0$ أي $\begin{pmatrix}x_A-a\\y_A-b\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}=0$

03. مثال:

أنظر الشكل .



1. أعط المعادلة الديكارتية ل (D). بطريقة مبيانية.

VI. مجموعة النقط M من المستوى حيث : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=k$ ثم $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k$ ثم $MA^2+MB^2=k$ ثم $MA^2-MB^2=k$ مع $k\in\mathbb{R}$

حالة 1: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=k$ (أو $\overrightarrow{MA}.\vec{u}=k$ و $\vec{u}\neq\vec{0}$)

A و B نقطتان من المستوى $(\mathcal{P})$ حيث : $AB=6$ و I منتصف $[AB]$.

1. حدد (E_1) مجموعة النقط M من $(\mathcal{P})$ حيث: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=0$.

2. حدد (E_2) مجموعة النقط M من $(\mathcal{P})$ حيث: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=-12$.

3. حدد (E_3) مجموعة النقط M من $(\mathcal{P})$ حيث: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=18$.

حالة 2: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k$

1. حدد (F_1) مجموعة النقط M من $(\mathcal{P})$ حيث: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=0$.
2. حدد (F_2) مجموعة النقط M من $(\mathcal{P})$ حيث: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=7$.
3. حدد (F_3) مجموعة النقط M من $(\mathcal{P})$ حيث: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=-9$.
4. حدد (F_3) مجموعة النقط M من $(\mathcal{P})$ حيث: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=-10$.

حالة 3: $MA^2+MB^2=k$

1. حدد (G_1) مجموعة النقط M من $(\mathcal{P})$ حيث: $MA^2+MB^2=68$.
2. حدد (G_2) مجموعة النقط M من $(\mathcal{P})$ حيث: $MA^2+MB^2=18$.
3. حدد (G_3) مجموعة النقط M من $(\mathcal{P})$ حيث: $MA^2+MB^2=4$.

حالة 4: $MA^2-MB^2=k$

1. حدد (H_1) مجموعة النقط M من $(\mathcal{P})$ حيث: $MA^2-MB^2=0$.
2. حدد (H_2) مجموعة النقط M من $(\mathcal{P})$ حيث: $MA^2-MB^2=36$.

▲ ملحوظة : يمكنك أن تحدد مجموعة النقط السابقة و للحالات الأربع بصفة عامة أي أخذ $k\in\mathbb{R}$ و AB وتناقش بفصل الحالات .