

المستوى: 1 ^{ème} BAC	الحساب المثلثي	الثانوية التأهيلية الأمير مولاي عبد الله التقنية - سيدي قاسم
STE+STM+SExp	Calcul Trigonométrique	الأستاذ: محمد اليمني
عدد الساعات: 8 ساعات		

I - صيغ التحويل :

(1) تحويل $\cos(a+b)$ و $\cos(a-b)$:

نعتبر $(O; \vec{i}; \vec{j})$ معلما متعامدا مرتبطا بدائرة مثلثية (U) ؛ وليكن a و b عددين حقيقيين ولتكن M و M' نقطتين من الدائرة المثلثية أفصولهما المنحنيين a و b على التوالي .

$$\text{لدينا : } \overline{OM} = \text{Cosa}\vec{i} + \text{Sina}\vec{j} \quad \text{و} \quad \overline{OM'} = \text{Cosb}\vec{i} + \text{Sinb}\vec{j} \quad \text{و} \quad (\overline{OM}; \overline{OM'}) \equiv a - b[2\pi]$$

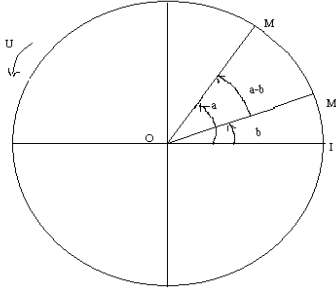
$$\text{إذن : } \cos(\overline{OM}; \overline{OM'}) = \frac{\overline{OM} \cdot \overline{OM'}}{\overline{OM} \cdot \overline{OM'}} = \text{CosaCosb} + \text{SinaSinb}$$

$$\text{ومنه فإن : } \cos(a-b) = \text{CosaCosb} + \text{SinaSinb}$$

بتطبيق الصيغ السابقة لدينا :

$$\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \text{CosaCos}(-b) + \text{SinaSin}(-b)$$

$$\cos(a+b) = \text{CosaCosb} - \text{SinaSinb}$$



(انظر الشكل بوضوح في الصفحة الأخيرة)

(2) تحويل $\sin(a+b)$ و $\sin(a-b)$:

نعلم أن $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{Sin}x$ وأن $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{Cos}x$ لكل x من \mathbb{R} .

$$\text{إذن : } \sin(a-b) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\text{Cosb} - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\text{Sinb}$$

$$\sin(a-b) = \text{SinaCosb} - \text{CosaSinb}$$

$$\text{و : } \sin(a+b) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\text{Cosb} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\text{Sinb}$$

$$\sin(a+b) = \text{SinaCosb} + \text{CosaSinb}$$

(3) تحويل $\tan(a+b)$ و $\tan(a-b)$:

وليكن a و b عددين حقيقيين وليكن a و b عددين حقيقيين بحيث : $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ و $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ و $a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\text{و } a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{لدينا : } \tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\text{SinaCosb} + \text{CosaSinb}}{\text{CosaCosb} + \text{SinaSinb}} = \frac{\text{CosaCosb}(\tan a + \tan b)}{\text{CosaCosb}(1 - \tan a \cdot \tan b)}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{(\tan a + \tan(-b))}{1 - \tan a \cdot \tan(-b)}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

تطبيقات :

(1) احسب $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$ و $\tan\frac{\pi}{2}$ واستنتج $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$

2 (باستعمال صيغة كل من $\cos(a-b)$ و $\sin(a-b)$ احسب : $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

4 (نتائج :

من الصيغ السابقة نستنتج أنه إذا كان : $a = b$ فإن :

$$\cos(a+a) = \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad \text{وبما أن : } \cos^2 a + \sin^2 a = 1 \quad \text{فإن :}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a \quad \text{ولدينا أيضا :}$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \quad \text{فإن : } a \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad \text{و } a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

خلاصة :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$	$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$	$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$
$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \quad \text{؛} \quad \sin 2a = 2\sin a \cos a$	$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

تمرين 1 :

ب - احسب : $\cos \frac{7\pi}{12}$ و $\sin \frac{7\pi}{12}$ و $\tan \frac{7\pi}{12}$	1 (أ - تحقق أن : $\frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$.
ب - احسب : $\cos \frac{11\pi}{12}$ و $\sin \frac{11\pi}{12}$ و $\tan \frac{11\pi}{12}$	2 (أ - تحقق أن : $\frac{11\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$.
ب - $B = \sin\left(\frac{5\pi}{6} + x\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{6} + x\right)$	3 (بسط ما يلي : أ - $A = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.
ج - $C = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \times \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (حيث : $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ و $x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$)	

تمرين 2: 1 (احسب $\sin^2 a$ و $\cos^2 a$ بدلالة $\cos 2a$.

2 (أ - بين أن : $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$ و أن : $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$.

ب - استنتج $\cos^3 a$ بدلالة $\cos a$ و $\cos 3a$

ج - استنتج $\sin^3 a$ بدلالة $\sin a$ و $\sin 3a$.

5 (صيغة $\cos a$ و $\sin a$ و $\tan a$ بدلالة $\tan \frac{a}{2}$:

ليكن a عددا حقيقيا بحيث $a \neq \pi + 2k\pi$.

$$\cos^2 \frac{a}{2} \quad \text{لدينا :} \quad \cos a = \cos\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} = \frac{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}}$$

$$\sin a = \sin\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = 2\sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = 2 \tan \frac{a}{2} \cos^2 \frac{a}{2} \quad \text{ولدينا :} \quad \cos a = \frac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$$

$$\text{وبما أن } \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}} \text{ فإن : } \sin a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$$

$$\text{وإذا كان } a \neq \pi + 2k\pi \text{ و } a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ فإن : } \tan a = \tan \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right) = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}$$

خلاصة :

$$\tan a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}} \quad ; \quad \sin a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}} \quad ; \quad \cos a = \frac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$$

إذا وضعنا $t = \tan \frac{a}{2}$ فإن :

$$\tan a = \frac{2t}{1-t^2} \quad ; \quad \sin a = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

تمرين 3 :

- 1 (ليكن a عدد حقيقي بحيث : $\tan a = 3$. احسب : $\sin 2a$ و $\cos 2a$ و $\tan 2a$.
2 (احسب العبير التالي بدلالة $\tan a$: $-2\sin^2 a + 2\sin a \cos a + 5$.
الحل :

$$\begin{aligned} -2\sin^2 a + 2\sin a \cos a + 5 &= 1 - 2\sin^2 a + 2\sin a \cos a + 4 = \cos 2a + \sin 2a + 4 \\ -2\sin^2 a + 2\sin a \cos a + 5 &= \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} + \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a} = \frac{1 - \tan^2 a + 2 \tan a}{1 + \tan^2 a} = \frac{2 - (\tan a - 1)^2}{1 + \tan^2 a} \end{aligned} \quad (2)$$

6 (تحويل الجداء إلى مجموع :

ليكن a و b عددين حقيقيين وليكن a و b عددين حقيقيين.

$$\begin{aligned} \cos(a+b) + \cos(a-b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2\cos a \cos b \end{aligned} \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned} \cos(a+b) - \cos(a-b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b - \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a+b) - \cos(a-b) &= -2\sin a \sin b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(a+b) + \sin(a-b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b + \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2\sin a \cos b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(a+b) - \sin(a-b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b - \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a+b) - \sin(a-b) &= 2\cos a \sin b \end{aligned}$$

من هذه العلاقات نستنتج :

$\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)] \quad (3)$	$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \quad (1)$
$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)] \quad (4)$	$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)] \quad (2)$

تمرين 4 :

1 (اكتب على شكل مجموع الجداءات التالية :

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \quad ; \quad \cos x \cos 3x \quad ; \quad \sin x \sin 4x$$

(2) اكتب على شكل مجموع الجداءات التالية :

$$\sin 2x \sin 3x \sin 5x \quad ; \quad \cos x \cos 2x \cos 3x \quad ; \quad \cos x \cos 2x \quad ; \quad \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) \cos 2x$$

(7) تحويل المجموع إلى جداء :

ليكن a و b عددين حقيقيين .

$$\text{نضع } a = \frac{p+q}{2} \text{ و } b = \frac{p-q}{2} \text{ إذن } q = a-b \text{ و } p = a+b$$

العلاقات (1) و (2) و (3) و (4) تصبح :

$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ (3)	$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ (1)
$\sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ (4)	$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ (2)

تمرين 5 : (1) اكتب المجموع التالي على شكل جداء من أربعة عوامل : $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$.

$$(2) \quad ABC \text{ مثلث . بين أن : } \sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C} = 4 \cos \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2}$$

II - تحويل $a \cos x + b \sin x$:

ليكن a و b عددين حقيقيين حيث $(a;b) \neq (0;0)$.

$$\text{لدينا : } a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

$$\text{ولدينا : } \left| \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \text{ و } \left| \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \text{ لأن : } a^2 \leq a^2 + b^2 \text{ و } b^2 \leq a^2 + b^2$$

$$\text{وبما أن : } \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1 \text{ فإنه يوجد عدد حقيقي } \alpha \text{ بحيث :}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ و } \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{إذن : } a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x)$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)$$

$$\text{أو : يوجد عدد حقيقي } \beta \text{ بحيث : } \sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ و } \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{في هذه الحالة : } a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \beta \cos x + \cos \beta \sin x)$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \beta)$$

إذن :

لكل عددين حقيقيين a و b حيث $(a;b) \neq (0;0)$ لدينا :

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha) \text{ أو } a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \beta)$$

أمثلة :

$$1. \quad \sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos x + \sin \frac{\pi}{6} \sin x \right) = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \sin x \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) . 1$$

ملاحظة :

يمكننا تحويل $a \cos x + b \sin x = c$ من حل معادلات من نوع $a \cos x + b \sin x = c$ أو متراجحات من نوع :
 $a \cos x + b \sin x \leq c$ أو : $a \cos x + b \sin x < c$ أو : $a \cos x + b \sin x \geq c$ أو : $a \cos x + b \sin x > c$: أمثلة :
 (1) حل في IR المعادلة : $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$.

حل بعض التمارين الواردة في الدرس

تمرين 5 :

(1) اكتب المجموع التالي على شكل جداء من أربعة عوامل : $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$.

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 2 \sin \left(\frac{x+3x}{2} \right) \cos \left(\frac{x-3x}{2} \right) + 2 \sin \left(\frac{5x+7x}{2} \right) \cos \left(\frac{5x-7x}{2} \right)$$

$$= 2 \sin 2x \cos x + 2 \sin 6x \cos x = 2 \cos x (\sin 2x + \sin 6x) \quad \text{لدينا :}$$

$$= 2 \cos x \left(2 \sin \left(\frac{2x+6x}{2} \right) \cos \left(\frac{2x-6x}{2} \right) \right) = 4 \cos x \sin 4x \cos 2x = 8 \cos x \cos 2x \sin 2x \cos 2x$$

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 8 \cos x \cos 2x \sin 2x \cos 2x \quad \text{إذن :}$$

$$(2) \quad ABC \text{ مثلث . نبين أن : } \sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C} = 4 \cos \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2} .$$

$$\text{لدينا : } \sin A + \sin B = 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\text{بما أن : في مثلث } ABC \text{ لدينا : } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \text{ فإن : } \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

$$\text{إذن : لدينا : } \sin A + \sin B = 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) = 2 \cos \frac{C}{2} \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\text{ولدينا : } \sin C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{إذن : } \sin A + \sin B + \sin C = 2 \cos \frac{C}{2} \left(\sin \frac{C}{2} + \cos \frac{A-B}{2} \right) = 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) + \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) \right)$$

ولدينا :

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) + \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) = 2 \cos \left(\frac{\pi - C + A - B}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi - C - A + B}{4} \right)$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) + \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) = 2 \cos \left(\frac{\pi + A - (C+B)}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi + B - (C+A)}{4} \right)$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) + \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) = 2 \cos \left(\frac{\pi + A - \pi + A}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi + B - \pi + B}{4} \right) = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\text{إذن : } \sin A + \sin B + \sin C = 2 \cos \frac{C}{2} \times 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

