تمارين : دراسة الدوال و تمثيلها المبياني

في هذه التمارين المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم م.م.م. $(O,\vec{i},\vec{j})$.

01

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة ب: $f(x)=x+\frac{1}{3x^3}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف f .
2. أدرس زوجية الدالة f ثم حدد D_E مجموعة دراسة f .
3. أحسب: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to 0^+} f(x)$
4. أحسب f' لكل x من D_E
5. أعط إشارة f' على D_E
6. أعط جدول تغيرات f على D_E ثم على D_f
7. أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C) على D_f .
8. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) على D_f والمستقيم ذي المعادلة $y=x$ على $]0,+\infty[$
9. أنشئ (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ بلون أسود.
10. لنعتبر الدالة g المعرفة ب $\mathbb{R}^*$ ب $g(x)=|x|+\frac{1}{3|x^3|}$ أدرس زوجية g على $\mathbb{R}^*$.
11. قارن f و g على $]0,+\infty[$ استنتج $C_{]0,+\infty[}$ منحنى g على D_E. ثم أنشئ (C_g) منحنى g على $]0,+\infty[\cup]-\infty,0[$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ بلون أخضر متقطع.

02

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ ب:

$$\begin{cases} f(x)=x-1+2\sqrt{1-x} \ ; \ x\leq 1 \\ f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3+1} \ ; \ x>1 \end{cases}$$

1. أحسب: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و بين أن: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
2. أدرس اشتقاق f على يمين ويسار $x_0=1$. ثم أول هندسيا النتيجتين المحصل عليهما.
3. أ – بين أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $]1,+\infty[$.

ب – بين أن :

$$\forall x\in]-\infty,1[, f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x}\left(1+\sqrt{1-x}\right)}$$

ج – أعط جدول تغيرات الدالة f.

4. أ – أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f).

ب - أنشئ (C_f) (لاحظ أن : $(f(-3)=0)$)

03

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{2\cos(x)+1}{2+\cos(x)}$.

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f .
2. أ - أدرس زوجية الدالة f على D_f .

ب - بين أن f دورية ودورها $T=2\pi$.

ج - استنتج D_E مجموعة دراسة f .

3. أ - أحسب f' على D_f .

ب - أ درس إشارة f' على D_E .

ج - أعط جدول تغيرات f على D_E .

4. أ - أنشئ (C_0) منحنى f في $(O,\vec{i},\vec{j})$ و ذلك على D_E (بلون أخضر)

ب - أنشئ (C_f) منحنى f في نفس المعلم (بلون أخضر متقطع) .

04

لنعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة ب:

$$f(x)=1-|x|+\frac{4}{5}\sqrt{x^2-1}$$

1. أ – حدد D_f حيز تعريف f .

ب – بين أنه يمكن دراسة f على $D=[1,+\infty[$.

ج - أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2. أ - أدرس قابلية اشتقاق f على يمين $x_0=1$.

ب – بين أن :

$$\forall x>1: f'(x)=\frac{25-9x^2}{5\sqrt{x^2-1}\left(4x+5\sqrt{x^2-1}\right)}$$

ج – أعط جدول تغيرات f على D ثم على D_f.

3. أ – أثبت أن : (C_f) يقبل مقاربا مائلا بجوار $+\infty$.

ب- حدد تقاطع (C_f) مع محور الأفاصيل.

ج – أنشئ (C_f) في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

الصفحة

.01 التمرين الأول

1- تحديد D_f :

$$x \in D_f \Leftrightarrow 3x^3 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x \neq 0$$

خلاصة :

$$D_f = \left]-\infty;0\right[\cup \left]0;+\infty\right[$$

2- دراسة زوجية f :

$$\forall x \in D_f , -x \in D_f$$

$$\forall x \in D_f , f(-x) = -x + \frac{1}{3(-x)^3}$$
$$= -x + \frac{1}{-3x^3}$$
$$= -(x + \frac{1}{3x^3})$$
$$= -f(x)$$

خلاصة : f دالة فردية

تحديد D_E مجموعة دراسة f

بما ان f دالة فردية

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

الصفحة

فان $D_E =]0;+\infty[$

خلاصة : $\boxed{D_E =]0;+\infty[}$

3- حساب : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x); \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x + \frac{1}{3x^3} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x + \frac{1}{3x^3} = +\infty$

4- حساب f' لكل x من D_E

$$\forall x \in D_E, f'(x) = \left[x + \frac{1}{3x^3}\right]'$$

$$= (x)' + \left[\frac{1}{3x^3}\right]'$$

$$= 1 - \frac{(3x^3)'}{9x^6}$$

$$= 1 - \frac{9x^2}{9x^6}$$

$$= 1 - \frac{1}{x^4}$$

خلاصة : $\boxed{\forall x \in D_E, f'(x) = 1 - \frac{1}{x^4}}$

5 – اشارة f' على D_E :

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

لنحل المعادلة $1-\frac{1}{x^4}=0$:

$$1-\frac{1}{x^4}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^4}=1$$
$$\Leftrightarrow x^4=1$$

$\Leftrightarrow x=1$ او $\Leftrightarrow x=-1$

خلاصة :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	

6- جدول تغيرات f على D_E :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		↗		↘	

جدول تغيرات f على D_f :

بما ان f دالة فردية فانها تحافظ على الرتابة

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		↘		↗	‖	↗		↘	

7 _ دراسة الفروع اللانهئية ل (C) على D_f :

لدينا : $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

تصحيح السلسلة رقم 11

الصفحة

من طرف التلميذة يماني آية

بجوار 0 :

لدينا $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

و منه المستقيم معادلته x=0 مقارب عمودي ل(C) بجوار $\pm\infty$

نلاحظ $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-x=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{1}{3x^3}=0$

ومنه (C) يقبل مقارب مائل هو المستقيم معادلته x=y

8- دراسة الوضع النسبي ل (C) و المستقيم x=y على $]0;+\infty[$:

لندرس الفرق : $f(x)-x$

$$f(x)-x=x+\frac{1}{3x^3}-x$$

$$=\frac{1}{3x^3}$$

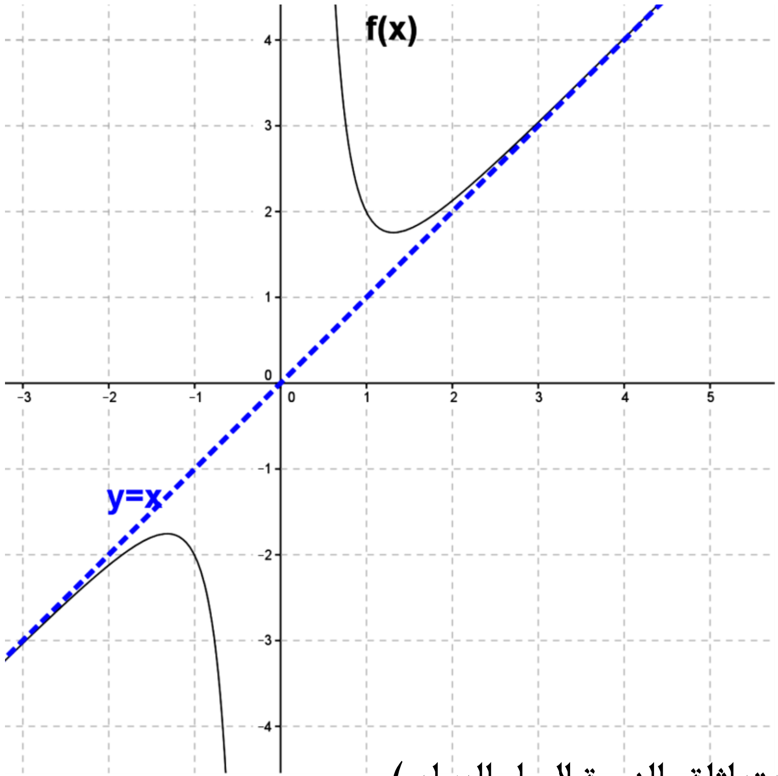
و لدينا $\forall x\in\,]0;+\infty[\,,\frac{1}{3x^3}\geq 0$

و منه (C) فوق المستقيم x=y على $]0;+\infty[$

9- انشاء (C) :

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية



لان f دالة فردية (متماثلة بالنسبة لاصل المعلم)

10- دراسة زوجية g :

$$\forall x \in D_g , -x \in D_g$$

$$\forall x \in D_g , g(-x) = |-x| + \frac{1}{3\left|(-x)^3\right|}$$

$$= |x| + \frac{1}{\left|-3x^3\right|}$$

$$= |x| + \frac{1}{\left|3x^3\right|}$$

$$= g(x)$$

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

الصفحة

خلاصة : g دالة زوجية

11 – مقارنة f و g على $]0;+\infty[$

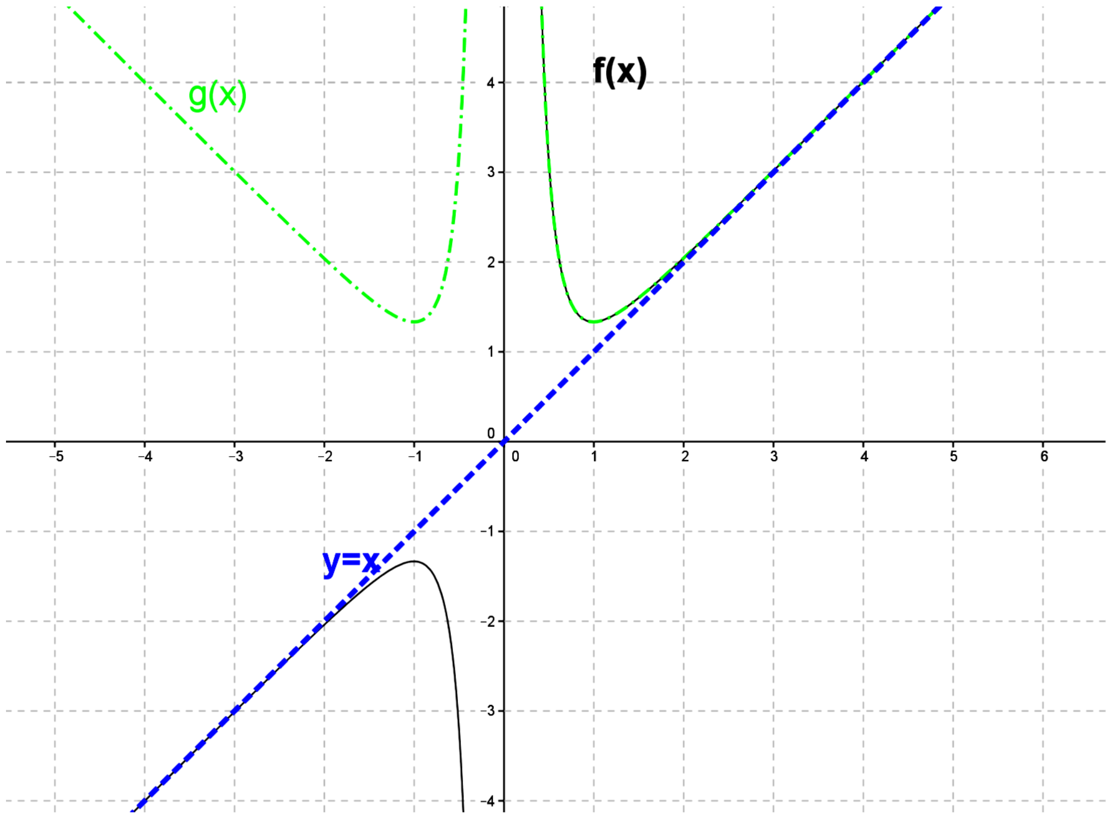
على $]0;+\infty[$ تصبح g : $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) = x + \frac{1}{3x^3}$

خلاصة : على $]0;+\infty[$ $f=g$

استنتاج $C_{]0;+\infty[}$:

بما ان f=g على $]0;+\infty[$ فان منحنى g يطابق منحنى f على $]0;+\infty[$

انشاء C_g



تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

الصفحة

02. التمرين الثاني :

1 – حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

نبين ان $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} x-1+2\sqrt{1-x}\\ &= \lim_{x\to-\infty} x\left(1-\frac{1}{x}-2\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}\right)\\ &= -\infty(1-0-2\times0)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

خلاصة : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2– دراسة اشتقاق f في $x_0 = 1$:

على اليمين :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to1^+} \frac{\frac{x^3-1}{x^3+1}-0}{x-1}\\ &= \lim_{x\to1^+} \frac{x^2+x+1}{x^3+1}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

على اليسار :

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

الصفحة

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x-1+2\sqrt{1-x}-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^-}1+\frac{2\sqrt{1-x}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^-}1-\frac{2}{\sqrt{1-x}}$$
$$=1-\frac{2}{0^+}$$
$$=-\infty$$

تاويل النتائج :

$\lim_{x\to1^+}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow$ المستقيم $y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$ مماس ل C_f على يمين 1

$\lim_{x\to1^-}=-\infty\Leftrightarrow$ C يقبل مماس راسي متجه نحو الاعلى

3 – ا – نبين ان f تزايدية على $[1;+\infty[$:

نحسب ' f على $[1;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{3x^2\left(x^3+1\right)-3x^2\left(x^3-1\right)}{\left(x^3+1\right)^2}=\frac{3x^2+3x^2}{\left(x^3+1\right)^2}=\left(\frac{\sqrt{6}x}{x^3+1}\right)^2$$

و بما ان $\left(\frac{\sqrt{6}x}{x^3+1}\right)^2\geq0$ فان f تزايدية على $[1;+\infty[$

ب – نبين ان : $\forall x\in\left]-\infty;1\right[,\ f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x}\left(1+\sqrt{1-x}\right)}$

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

الصفحة

$$\forall x \in]-\infty;1[,\ f'(x) = \left[x-1+2\sqrt{1-x}\right]'$$

$$=1+2\left(\sqrt{1-x}\right)'$$

$$=1+2\times\frac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}}$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{1-x-1}{\sqrt{1-x}\times\left(\sqrt{1-x}+1\right)}$$

$$=\frac{-x}{\sqrt{1-x}\times\left(\sqrt{1-x}+1\right)}$$

خلاصة :

$$\forall x \in]-\infty;1[,\ f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}\times\left(\sqrt{1-x}+1\right)}$$

ج- جدول تغيرات f :

على المجال $[1;+\infty[$: f تزايدية

على المجال $]-\infty;1[$:

لندرس اشارة 'f على $]-\infty;1[$

اشارة 'f هي اشارة $-x$

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

و $-x$ ينعدم في 0

ومنه :

x	$-\infty$	0	1 $\quad +\infty$
f '(x)	+	−	+
f (x)	↗	↘	↗

4-أ-دراسة الفرعين اللانهائيين ل (C) :

بجوار $+\infty$:

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

و منه المستقيم معادلته $y=1$ مقارب افقي ل (C) بجوار $+\infty$

بجوار $-\infty$:

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

و

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}1-\frac{1}{x}+2\sqrt{\frac{1-x}{x^2}}$$

$$=1-0+2\times0$$

$$=1$$

و

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

الصفحة 11

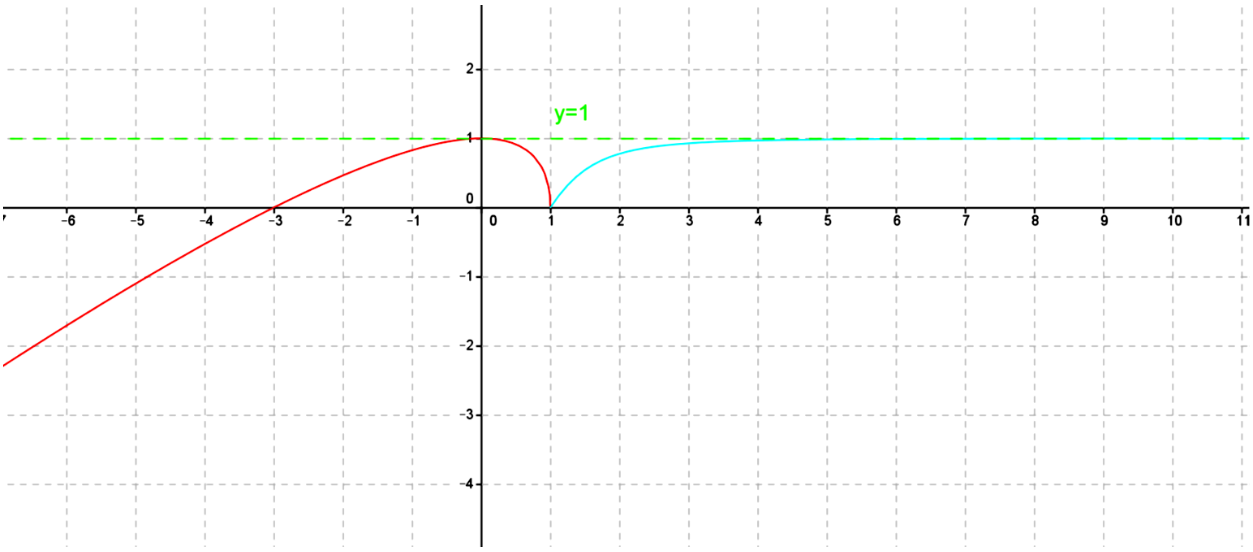
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-x=\lim_{x\to-\infty} -1+2\sqrt{1-x}$$

$$=-1+2\times(+\infty)$$

$$=+\infty$$

و منه (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم x=y بجوار $-\infty$

ب- انشاء C_f :



.03 التمرين الثالث :

1 – تحديد D_f :

$$x\in D_f \Leftrightarrow 2+\cos(x)\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x)\neq -2$$

و بما ان $\forall x\in\mathbb{R}, -1\leq\cos(x)\leq 1$

فان $D_f=\mathbb{R}$

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

خلاصة : $D_f = \mathbb{R}$

2- أ – دراسة زوجية f على D_f

$$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{2\cos(-x)+1}{2+\cos(-x)}$$

$$= \frac{2\cos(x)+1}{2+\cos(x)}$$

$$= f(x)$$

و منه $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$

خلاصة : f دالة زوجية

ب – نبين ان f دورية و دورها $T = 2\pi$

$$f(x+2\pi) = \frac{2\cos(x+2\pi)+1}{2+\cos(x+2\pi)}$$

$$= \frac{2\cos(x)+1}{2+\cos(x)}$$

$$= f(x)$$

و منه $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2\pi) = f(x)$

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

خلاصة : f دورية و دورها $T=2\pi$

ج – استنتاج D_E :

لدينا f زوجية و دورية دورها $T=2\pi$

و منه $D_E=[0,\pi]$

3 – ا-حساب f' على D_f :

$$\forall x\in D_f\,,\ f'(x)=\left[\frac{2\cos(x)+1}{2+\cos(x)}\right]'$$

$$=\frac{[2\cos(x)+1]'\times[2+\cos(x)]-(2\cos(x)+1)\times[2+\cos(x)]'}{[2+\cos(x)]^2}$$

$$=\frac{-2\sin(x)\times[2+\cos(x)]+2\cos(x)\times\sin(x)+\sin(x)}{[2+\cos(x)]^2}$$

$$=\frac{-3\sin(x)}{[2+\cos(x)]^2}$$

خلاصة : $f'(x)=\dfrac{-3\sin(x)}{[2+\cos(x)]^2}$

ب–اشارة f' على D_E

بما ان $f'(x)=\dfrac{-3\sin(x)}{[2+\cos(x)]^2}$

فان اشارة f' هي اشارة $-\sin(x)$

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

و نعلم ان على $[0,\pi]$ تكون $\sin(x) \geq 0$

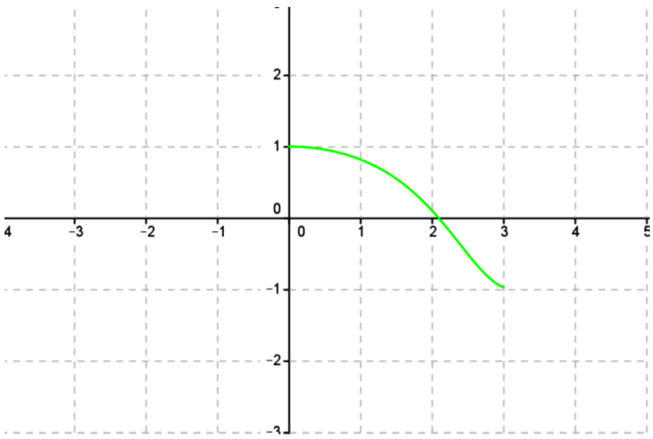
و بالتالي $f'(x) \leq 0$

خلاصة: $\forall x \in [0,\pi], f'(x) \leq 0$

ج– جدول تغيرات f على D_E :

x	0 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ π
f(x)	$1 \searrow -1$

4–أ– انشاء C_0 على D_E :



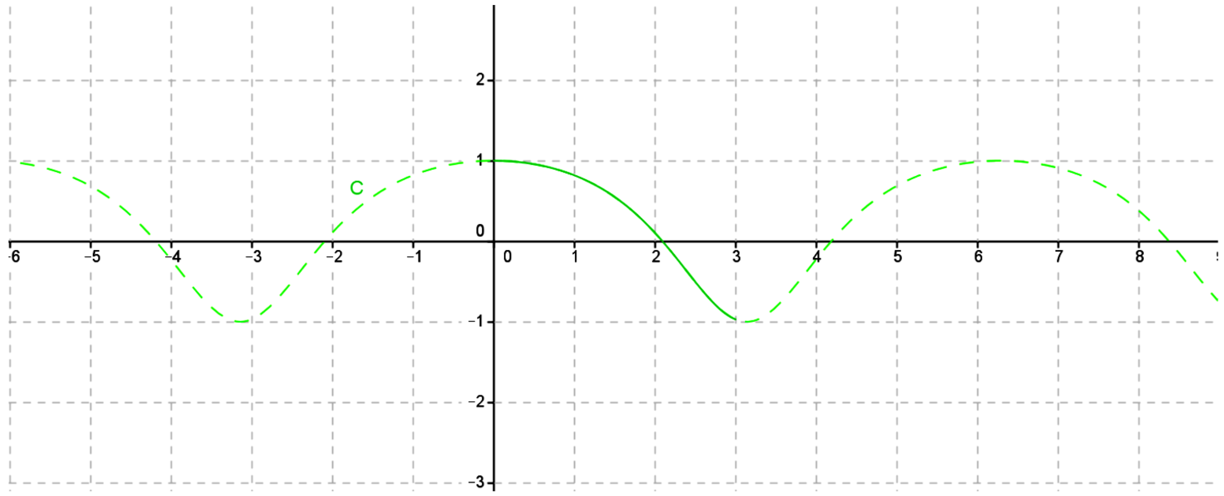
ب– انشاء C_f :

بما ان f زوجية ننشئ مماثل C_0 بالنسبة لمحور الاراتيب

و بما ان f دورية نستعمل الازاحة التي متجهتها $\vec{u} = 2k\pi\vec{i}$

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية



التمرين الرابع :

1-أ-تحديد D_f :

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq -1 \quad \text{او} \quad x \geq 1$$

خلاصة : $D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

ب-امكانية دراسة f على $D = [1, +\infty[$:

ندرس زوجية f :

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

$$\forall x \in D_f , -x \in D_f$$

$$\forall x \in D_f , f(-x) = 1 - |-x| + \frac{4}{5}\sqrt{(-x)^2 - 1}$$

$$= 1 - |x| + \frac{4}{5}\sqrt{x^2 - 1}$$

$$= f(x)$$

ومنه f زوجية نكتفي بدراستها على $D = [1, +\infty[$

ج- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - |x| + \frac{4}{5}\sqrt{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 - x + \frac{4}{5}\sqrt{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{4}{5}\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= +\infty \times -\frac{1}{5}$$

$$= -\infty$$

خلاصة : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$

2- ا-دراسة قابلية اشتقاق f على يمين $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to1^+} -1 + \frac{4}{5}\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to1^+} -1 + \frac{4}{5}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$$

$$= +\infty$$

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

خلاصة : f غير قابلة للاشتقاق على يمين 1

ب- نبين ان $\forall x \geq 1,\ f'(x) = \dfrac{25-9x^2}{5\sqrt{x^2-1}\left(4x+5\sqrt{x^2-1}\right)}$

$$f'(x) = \left[1 - x + \frac{4}{5}\sqrt{x^2-1}\right]'$$

$$= -1 + \frac{4}{5} \times \frac{\left[x^2-1\right]'}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$= -1 + \frac{4x}{5\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{4x - 5\sqrt{x^2-1}}{5\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{16x^2 - 25x^2 + 25}{5\sqrt{x^2-1}\left(4x+5\sqrt{x^2-1}\right)}$$

خلاصة : $\forall x \geq 1,\ f'(x) = \dfrac{25-9x^2}{5\sqrt{x^2-1}\left(4x+5\sqrt{x^2-1}\right)}$

ج- جدول تغيرات f :

على D :

x			5/3	+∞
f '(x)	//	+∞ +	0	−
f (x)	//	↗		↘

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

على D_f :

x	$-\infty$		$-5/3$		-1		1		$5/3$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−		////		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘		////		↗		↘	

3-أ-نثبت ان $\left(C_f\right)$ يقبل مقاربا مائلا بجوار $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-1+\frac{4}{5}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$=0-1+\frac{4}{5}\sqrt{1-0}$$

$$=-\frac{1}{5}$$

و لدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{1}{5}x\right)=\lim_{x\to+\infty}1-x+\frac{4}{5}\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{5}x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}1-\frac{4}{5}x+\frac{4}{5}\sqrt{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{5}x^2\left(\frac{-1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}\right)+1$$

$$=+\infty(0+0)+1$$

$$=1$$

خلاصة: المستقيم معادلته $y=-\frac{1}{5}x+1$ مقارب مائل ل (C_f) بجوار $+\infty$

ب-تحديد تقاطع $\left(C_f\right)$ مع محور الافاصيل :

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

الصفحة 19

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 1-|x|+\frac{4}{5}\sqrt{x^2-1}=0$$
$$\Leftrightarrow 5-5|x|+4\sqrt{x^2-1}=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=\frac{-5}{4}+\frac{5}{4}|x|$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=\frac{5}{4}(|x|-1)$$
$$\Leftrightarrow x^2-1=\frac{25}{16}(x^2-2|x|+1)$$
$$\Leftrightarrow x^2-\frac{25}{16}x^2+\frac{25}{8}|x|=1+\frac{25}{16}$$
$$\Leftrightarrow \frac{9}{16}x^2-\frac{25}{8}|x|+\frac{41}{16}=0$$

و منه : $|x|=1$ او $|x|=\frac{41}{9}$

خلاصة : تقاطع (C_f) مع محور الافاصيل هما النقط $A(1;0)$ و $B\left(\frac{41}{9};0\right)$

و $(-1;0)$ و $D\left(\frac{-41}{9};0\right)$

ج-انشاء (C_f) :