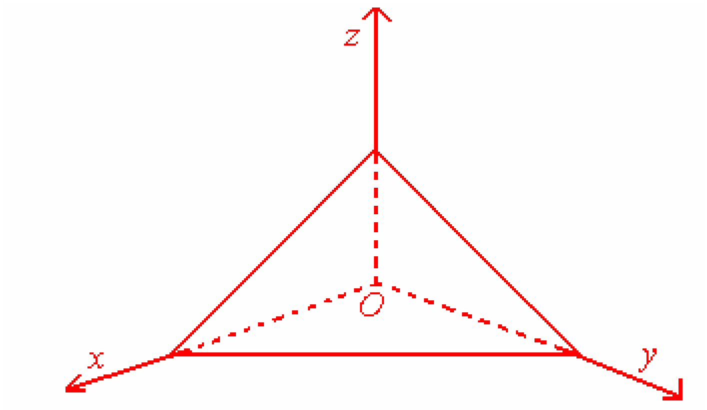
I- توجيه الفضاء : Orientation de l’espace

1. ثلاثي الأوجه : Tetraèdre :

تعريف :

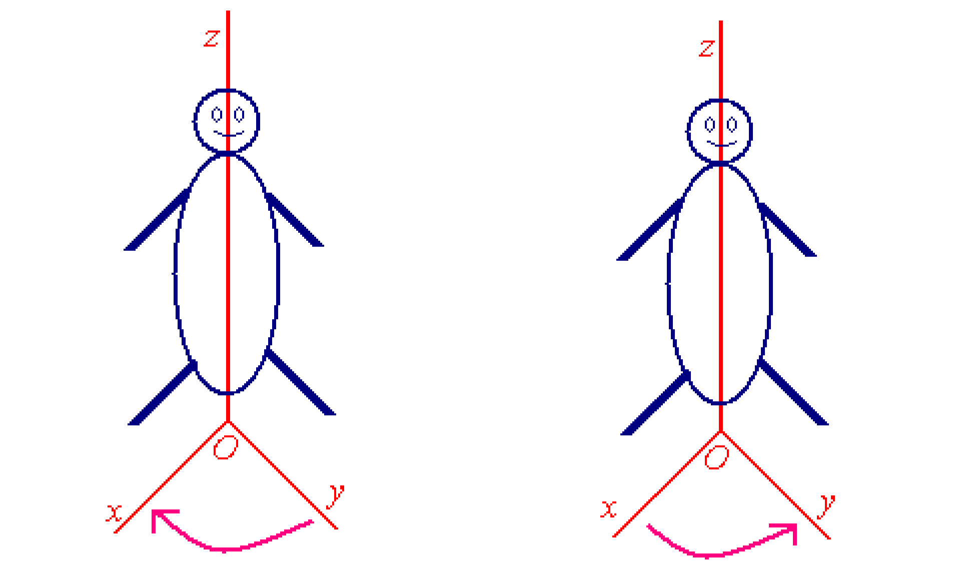
ثلاثة أنصاف مستقيم في الفضاء $[Ox)$ و $[Oy)$ و $[Oz)$ وغير مستوائية ، تكون في هذا الترتيب ثلاثي أوجه ، نرمز له بالرمز (Ox, Oy, Oz) .
$[Ox)$ و $[Oy)$ و $[Oz)$ تسمى أحرف ثلاثي الأوجه .



2. رجل أمبير : Le Bonhomme d’Ampère :

تعريف :

رجل أمبير لثلاثي الأوجه (Ox, Oy, Oz) هو شخص خيالي محمول على الحرف $[Oz)$ ، رجلاه في الأصل O ، ويرى الحرف $[Ox)$.
يوجد موضعان للحرف $[Oy)$ بالنسبة لرجل أمبير :
- الحرف $[Oy)$ عن يساره .
- الحرف $[Oy)$ عن يمينه .



3. منحى ثلاثي الأوجه وتوجيه الفضاء :

اتفاق : لما يكون رجل أمبير على الحرف $[Oz)$ ورجلاه في O وهو يرى الحرف $[Oy)$ عن يساره ، نقول إن ثلاثي الأوجه (Ox, Oy, Oz) مباشر (أو موجب) .

بهذا نكون قد وجهنا الفضاء إلى صنفين :

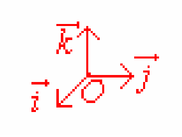
- **صنف ثلاثي أوجه مباشر .**
- **صنف ثلاثي أوجه غير مباشر .**

4. معلم موجه في الفضاء : Repère orienté dans l'espace :

نعتبر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلما في الفضاء $(\mathcal{E})$. نضع : $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ و $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ و $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$.

تعريف :

يكون $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلما مباشرا للفضاء $(\mathcal{E})$ إذا كان ثلاثي الأوجه (OI,OJ,OK) مباشرا .



5. الأسس المباشرة : Les Bases directes :

تعريف :

ليكن $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ أساسا للفضاء $\mathcal{V}_3$. ولتكن O نقطة من الفضاء $(\mathcal{E})$.

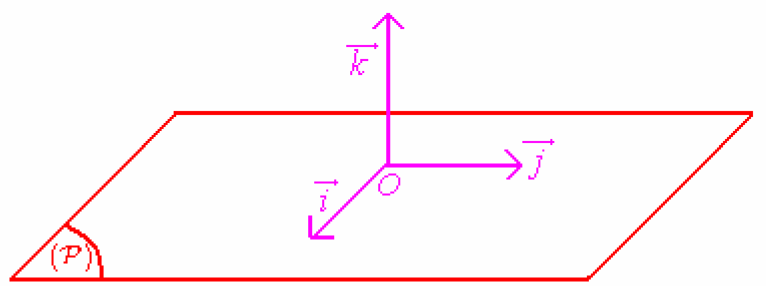
إذا كان $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلما مباشرا للفضاء $(\mathcal{E})$ ، فإننا نقول إن $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ أساس مباشر للفضاء $\mathcal{V}_3$.

6. توجيه مستوى في الفضاء : Orientation d'un Plan dans l'espace :

نعتبر $(\mathcal{P})$ مستوى في الفضاء $(\mathcal{E})$، و $\vec{k}$ متجهة واحدية منظمية على المستوى $(\mathcal{P})$.

من نقطة $O\in(\mathcal{P})$ ، ننشئ معلما متعامدا ممنظما $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ للفضاء $(\mathcal{E})$.

يكون المعلم المتعامد الممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ مباشرا في المستوى $(\mathcal{P})$، إذا كان المعلم المتعامد الممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ مباشرا في الفضاء $(\mathcal{E})$.



توجيه مستوى $(\mathcal{P})$ في الفضاء $(\mathcal{E})$، يتم بتوجيه متجهة $\vec{k}$ منظمية عليه .

II. الجداء المتجهي لمتجهتين : Produit Vectoriel de deux vecteurs :

1. تعريف :

في الفضاء الموجه ، نعتبر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين ونعتبر O نقطة من الفضاء $(\mathcal{E})$.

نعلم أن : $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ و $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ / $\exists!(A,B)\in(\mathcal{E})^2$.

✓ إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين ، فإن الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ، في هذا الترتيب ، هو المتجهة $\vec{w}$ التي تحقق ممثلتها $\overrightarrow{OC}$ الشروط التالية :

- $(OC)\perp(OAB)$.
- ثلاثي الأوجه $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$ مباشر .
- $\boxed{\left\|\overrightarrow{OC}\right\|=\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OB}\right\|\times\sin(\theta)}$ ، حيث θ هو قياس الزاوية الهندسية $\left[A\hat{O}B\right]$

✓ إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين ، فإن الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$، في هذا الترتيب ، هو المتجهة المنعدمة $\vec{0}$

✓ نرمز للجداء المتجهي لمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$، في هذا الترتيب ، بالرمز $\vec{u}\wedge\vec{v}$ أو ($\vec{u}\times\vec{v}$) ونقرأ : $\vec{u}$ متجهي $\vec{v}$.

ملاحظتين : أ- لكل متجهتين غير منعدمتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من الفضاء $\mathcal{V}_3$ ، لدينا :

$$\boxed{\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\sin(\theta)}$$

ب- إذا كان $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}\neq\vec{0}$ ، فإن المثلوث $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ أساس مباشر للفضاء $\mathcal{V}_3$.

مثال : أحسب $\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|$ في كل من الحالتين التاليتين :

أ- $\left\|\vec{u}\right\|=10$ و $\left\|\vec{v}\right\|=2$ و $\vec{u}.\vec{v}=10$.

ب- $\left\|\vec{u}\right\|=6$ و $\left\|\vec{v}\right\|=6$ و $\overline{\left(\vec{u},\vec{v}\right)}\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

2. تطبيق : بين متساوية Lagrange :

$$\boxed{\forall\left(\vec{u},\vec{v}\right)\in\mathcal{V}_3^2\quad:\quad\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|^2+\left(\vec{u}.\vec{v}\right)^2=\left\|\vec{u}\right\|^2\left\|\vec{v}\right\|^2}$$.

3. خاصيات :

أ- لكل $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)\in\mathcal{V}_3^3$ ، لدينا : $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}\ \Rightarrow\ \vec{w}\perp\vec{u}$ و $\vec{w}\perp\vec{v}$.

ب- تخالف الجداء المتجهي : $\boxed{\forall\left(\vec{u},\vec{v}\right)\in\mathcal{V}_3^2\quad:\quad\vec{u}\wedge\vec{v}=-\left(\vec{v}\wedge\vec{u}\right)}$.

جـ- خطانية الجداء المتجهي :

خاصية :

لتكن $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ و $\vec{v}$ متجهات من الفضاء $\mathcal{V}_3$ ، وليكن $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

- $\left(\vec{u_1}+\vec{u_2}\right)\wedge\vec{v}=\left(\vec{u_1}\wedge\vec{v}\right)+\left(\vec{u_2}\wedge\vec{v}\right)$.
- $\vec{u}\wedge\left(\vec{v_1}+\vec{v_2}\right)=\left(\vec{u}\wedge\vec{v_1}\right)+\left(\vec{u}\wedge\vec{v_2}\right)$.
- $\left(\alpha\vec{u}\right)\wedge\vec{v}=\alpha\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$.
- $\vec{u}\wedge\left(\beta\vec{v}\right)=\beta\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$.

د- انعدام الجداء المتجهي (شرط استقامية متجهتين):

خاصية :

يكون الجداء المتجهي لمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ منعدما إذا وفقط إذا كانت المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان .

برهان : لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء $\mathcal{V}_3$. نضع : $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$. لدينا :

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}\ \Leftrightarrow\ \left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|=0$

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}\ \Leftrightarrow\ \left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\sin(\theta)=0$

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}\ \Leftrightarrow\ \left\|\vec{u}\right\|=0$ أو $\left\|\vec{v}\right\|=0$ أو $\sin(\theta)=0$

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}\ \Leftrightarrow\ \vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ أو ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ لهما نفس الاتجاه)

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}\ \Leftrightarrow$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان

نتيجة :

في الفضاء الموجه ، لدينا :
$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0} \Leftrightarrow$ [A و B و C نقط مستقيمية]

تطبيق : ليكن ABC مثلثا .

1. بين أن : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$.
2. استنتج علاقة الأجياب الثلاثة في المثلث ABC : $\boxed{\dfrac{\sin(\widehat{A})}{BC}=\dfrac{\sin(\widehat{B})}{CA}=\dfrac{\sin(\widehat{C})}{AB}}$.

III. تحليلية الجداء المتجهي :

1. خاصية وتعريف :

ليكن $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ أساسا متعامدا ممنظما للفضاء $\mathcal{V}_3$.

لتكن $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ متجهتين من الفضاء $\mathcal{V}_3$. لدينا :

$$\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\vec{k}}$$

$$\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}$$

برهان : نعلم أن : $\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{0}$ و $\vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{0}$ و $\vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}$ و $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$ و $\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$ و $\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$.

إذن :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\wedge(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=xx'(\vec{i}\wedge\vec{i})+xy'(\vec{i}\wedge\vec{j})+xz'(\vec{i}\wedge\vec{k})+yx'(\vec{j}\wedge\vec{i})+yy'(\vec{j}\wedge\vec{j})+yz'(\vec{j}\wedge\vec{k})$$
$$+zx'(\vec{k}\wedge\vec{i})+zy'(\vec{k}\wedge\vec{j})+zz'(\vec{k}\wedge\vec{k})$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=xy'\vec{k}-xz'\vec{j}-yx'\vec{k}+yz'\vec{i}+zx'\vec{j}-zy'\vec{i}$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=(yz'-zy')\vec{i}-(xz'-zx')\vec{j}+(xy'-yx')\vec{k}$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\vec{k}$$

وبالتالي فإن : $\vec{u}\wedge\vec{v}\left(\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\right)$ بالنسبة للأساس $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

تطبيق : في الفضاء الموجه $(\mathcal{E})$ ، نعتبر النقط $A(1,0,2)$ و $B(-1,1,1)$ و $C(3,2,0)$.

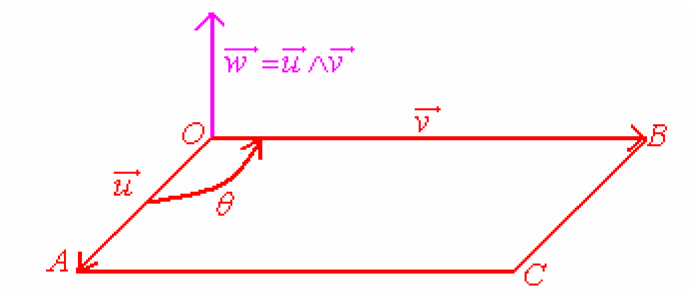
1. حدد مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
2. استنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية .
3. استنتج معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

IV. تطبيقات : Applications :

1. مساحة مثلث- مساحة متوازي الأضلاع: Aire d'un Triangle,d'un Parallélogramme:

في الفضاء $(\mathcal{E})$، نعتبر $OABC$ متوازي الأضلاع المنشأ انطلاقا من المتجهتين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ ؛ ولتكن S مساحته .

نعلم أن مساحة المثلث AOB هي :



$$s = \frac{1}{2}OA \times OB \times \sin(\theta)$$
$$s = \frac{1}{2}\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\theta)$$
$$s = \frac{1}{2}\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$$

ومنه فإن مساحة متوازي الأضلاع $OABC$ هي : $S = 2s = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$.

خاصية 1 :

✓ مساحة مثلث ABC في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر هي : $\boxed{s = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$.

خاصية 2 :

✓ مساحة متوازي الأضلاع المنشأ انطلاقا من متجهتين غير منعدمتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر هي :
$\boxed{S = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$.

✓ مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$ هي : $\boxed{S = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|}$

2. معادلة مستوى معرف بثلاث نقط غير مستقيمية :

خاصية :

ليكن (ABC) مستوى في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر.
لدينا $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على المستوى (ABC) . إذن :
$$\boxed{M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0}$$

مثال : في الفضاء $(\mathcal{E})$ المنسوب المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، نعتبر النقط $A(5,2,0)$ و $B(3,5,-1)$ و $C(-2,-3,1)$.

1. بين أن النقط A و B و C غير مستقيمية .
2. حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

3. تقاطع مستويين :

في الفضاء $(\mathcal{E})$ المنسوب المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، نعتبر المستويين :
$(\mathcal{P}) \;:\; ax+by+cz+d=0$ و $(\mathrm{Q}) \;:\; a'x+b'y+c'z+d'=0$.

لدينا : $\vec{n}(a,b,c)$ متجهة منظمية على المستوى $(\mathcal{P})$ و
$\vec{n'}(a',b',c')$ متجهة منظمية على المستوى (Q) .

نفترض أن : $\vec{n} \wedge \vec{n'} \neq \vec{0}$. إذن $(\mathcal{P})$ و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) موجه بالمتجهة $\vec{n} \wedge \vec{n'}$.
لتحديد نقطة من المستقيم (Δ) ، نستعمل معادلتي المستويين $(\mathcal{P})$ و (Q) .

مثال : حدد تقاطع المستويين التاليين: $(\mathcal{P}):\; x+2y-2z+3=0$ و $(Q):\; 4x-4y+2z-5=0$.

4. مسافة نقطة عن مستقيم : Distance d'un point à une droite :

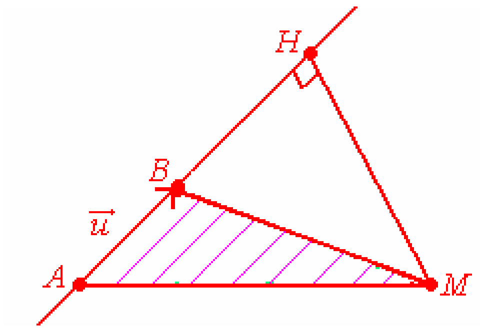
في الفضاء $(\mathcal{E})$ المنسوب المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، نعتبر مستقيما $D(A,\vec{u})$ و

نعتبر M نقطة مسقطها العمودي H على المستقيم $D(A,\vec{u})$.

مساحة المثلث ABM هي : $S=\frac{1}{2}AB\times HM$ ولدينا : $S=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|$. إذن :

$AB\times HM=\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|$.أي : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times HM=\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|$ ومنه نستنتج أن :

$d\left(M,D(A,\vec{u})\right)=HM=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$.



خاصية : المسافة بين نقطة M من الفضاء $(\mathcal{E})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ و مستقيم $D(A,\vec{u})$ هي :

$$\boxed{d\left(M,D(A,\vec{u})\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}}$$

مثال : في الفضاء $(\mathcal{E})$ المنسوب المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، حدد المسافة بين النقطة $M(3,2,-1)$ و المستقيم $(\Delta):\begin{cases}x=2-t\\ y=2t \quad / \quad t\in\mathbb{R}\\ z=1+t\end{cases}$.

5. المسافة بين مستقيمين (إضافة) : Distance entre deux droites(Compléments) :

في الفضاء $(\mathcal{E})$ المنسوب المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، نعتبر مستقيمين غير مستوائيين $D(A,\vec{u})$ و $D(B,\vec{v})$. المسافة بين المستقيمين $D(A,\vec{u})$ و $D(B,\vec{v})$ هي :

$$\boxed{d\left(D(A,\vec{u}),D'(B,\vec{v})\right)=\frac{\left|\overrightarrow{AB}.(\vec{u}\wedge\vec{v})\right|}{\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|}}$$

مثال : ليكن (D) المستقيم المار من النقطة $A(1,0,-1)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(0,1,1)$.

وليكن (D') المستقيم المار من النقطة $B(-1,0,0)$ والموجه بالمتجهة $\vec{v}(1,0,2)$.

1. بين أن المستقيمين (D) و (D') غير مستوائيين .
2. أحسب المسافة بين المستقيمين (D) و (D') .

تمرين : بين أن : $\boxed{\forall(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\in\mathcal{V}_3^3 \ : \ \vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=(\vec{u}\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\vec{v})\vec{w}}$

بالتوفيق إنشاء الله