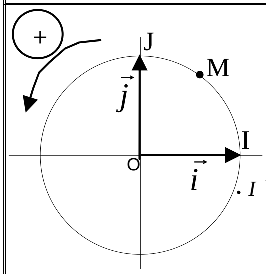
# الحساب المثلثي

## I- الأفاصيل المنحنية




1) * ) ليكن $(o,\vec{i},\vec{j})$ م م م. ولتكن $U$ الدائرة التي مركزها $o$ وشعاعها1

*)نختار المنحى المعاكس لعقربي الساعة كمنحى موجب. ولتكن $I(1,0)$ .

* ) الدائرة $U$ تسمى الدائرة المثلثية التي أصلها $I$ .

2) لتكن $M$ نقطة من $U$. للحصول على أفصول منحني لـــ $M$ .
نختار قوسا تؤدي من $I$ نحو $M$ ونقيس طولها.
ليكن $\alpha$ طول هذه القوس.

* ) إذا كان الانتقال من $I$ نحو $M$ يتم حسب المنحى الموجب فإن $\alpha$ أفصول منحني للنقطة $M$ .

* ) إذا كان الانتقال من $I$ نحو $M$ يتم حسب المنحى السالب فإن $-\alpha$ أفصول منحني للنقطة $M$ .

3) للحصول على جميع الأفاصيل المنحنية لنقطة $M$ يكفي أن نتعرف على أحد هذه الأفاصيل فقط (عادة نختار أقصر قوس تؤدي من $I$ إلى $M$ ).
وإذا كان $\alpha$ أحد هذه الأفاصيل فإن الأفاصيل المنحنية للنقطة $M$ هي الأعداد التي تكتب على شكل $\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ .

4) يكون العددان $\alpha$و$\beta$ أفصولين منحنين لنفس النقطة إذا وفقط إذا كان $\alpha-\beta=2k\pi$ يعني $\alpha=\beta-2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ونكتب $\alpha\equiv\beta[2\pi]$ .

ملاحظة: 1)

$$\alpha\equiv\beta[2\pi]\Leftrightarrow\alpha=\beta+2k\pi$$
$$\Leftrightarrow\alpha-\beta=2k\pi$$

$\Leftrightarrow$ ( $\alpha$و$\beta$ أفصولين منحنين لنفس النقطة)

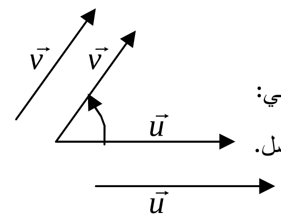
2) *) $\alpha\equiv\alpha+2n\pi\ \ [2\pi]$

*) $\alpha\equiv\beta\,[2\pi]\Leftrightarrow\alpha\equiv\beta+2n\pi\ \ [2\pi]$

5) من بين جميع الأفاصيل المنحنية لنقطة $M$ يوجد أفصول منحني وحيد $\alpha_0$ يحقق $-\pi\langle\alpha_0\langle\pi$ . يسمى $\alpha_0$ الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة $M$
(ونحصل عليه باختيار أقصر قوس تؤدي من $I$ نحو $M$ ).

6) نعتبر الأعداد $\alpha+\frac{2k\pi}{n}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ .
عدد النقط التي أفاصيلها المنحنية هي هذه الأعداد هو $n$ . ومن أجل إنشائها يكفي تعويض $k$ ب $n$ قيمة متتابعة. عادة نعوض $k$ بالقيم $0,1,2.....,(n-1)$
وهذه النقط تكون مضلعا منتظما محاطا بالدائرة $U$ .

## II- قياس الزوايا الموجهة




1) لتكن $\vec{v},\vec{u}$ متجهتين غير منعدمتين.
من أجل تحديد قياسات الزاوية الموجهة $(\vec{v},\vec{u})$ للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نتبع ما يلي:

*) نزيح المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إلى نفس الأصل.

*) المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ تحددان زاويتين هندسيتين نختار إحداهما
(عادة نختار الزاوية الحادة) ونحدد قياسها الهندسي بالرديان. ليكن $\alpha$ هذا القياس.

$\longleftarrow$) إذا التحرك من $\vec{u}$ نحو $\vec{v}$ داخل هذه الزاوية يتم حسب المنحى الموجب فإن كل عدد على شكل $\alpha+2k\pi$ هو قياس لهذه الزاوية ونكتب
$\overline{(\vec{u},\vec{v})}=\alpha+2k\pi$ أو $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv\alpha[2\pi]$ .

$\longleftarrow$) إذا كان التحرك من $\vec{u}$ نحو $\vec{v}$ داخل هذه الزاوية يتم حسب المنحى الموجب فإن كل عدد على شكل $-\alpha+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ هو قياس لهذه الزاوية.
ونكتب $\overline{(\vec{u},\vec{v})}=-\alpha+2k\pi$ أو $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv-\alpha[2\pi]$ .

**2) خاصيات.**

a) من بين قياسات $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ يوجد قياس وحيد يحقق $-\pi\langle\alpha_0\leq\pi$ ويسمى القياس الرئيسي.

b) $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv\overline{(\vec{u},\vec{w})}+\overline{(\vec{w},\vec{v})}\ \ [2\ \ ]$ (علاقة شال).

c) $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv-\overline{(\vec{v},\vec{u})}\ \ [2\pi]$ .

d) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين ولهما نفس المنحى فإن $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv0[2\pi]$

e) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين ولهما منحيان متعاكسان فإن $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv\pi[2\pi]$

f) يكون $\alpha$و$\beta$ قياسين لنفس الزاوية إذا وفقط إذا كان $\alpha-\beta=2k\pi$ يعني $\alpha\equiv\beta[2\pi]$ .

**ملاحظة:**

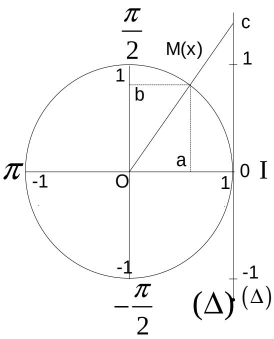
1) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين إذا وفقط إذا كان حاملاهما متوازيين.

2) المتجهتين $\vec{u}$ و $\alpha\vec{u}$ (مع $\alpha\rangle0$) مستقيمان ولهما نفس المعنى.

3) المتجهتين $\vec{u}$ و $\alpha\vec{u}$ (مع $\alpha\langle0$) مستقيمان ولهما منحيان متعاكسان.

## III- الدوال المثلثية

**1)تعريف**




لتكن $U$ الدائرة المثلثية التي أصلها $I$ .
وليكن $(\Delta)$ المحور المماس ل $U$ في $I$ .
ندرج المحور $(\Delta)$ بنفس وحدة معلم وأصله $I$ .

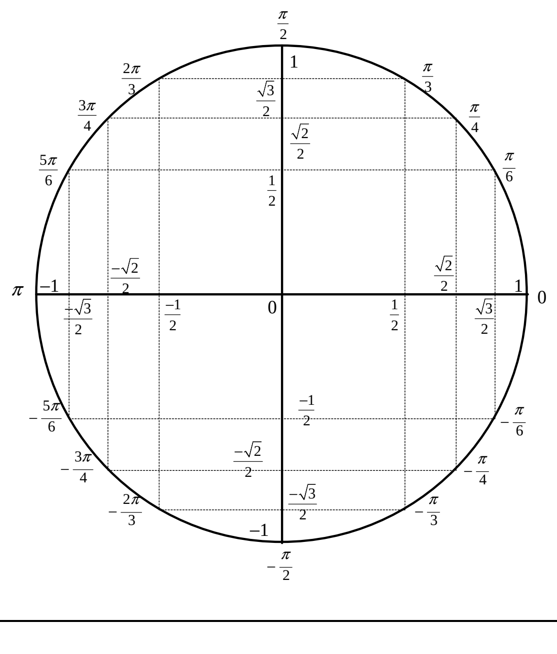
*) ليكن $x$ من $\mathbb{R}$ و $M$ النقطة التي أفصولها المنحني هو $x$
ليكن $a$ أفصول ل $M$ و $b$
ارتوب $M$ يعني $M(a,b)$ .
$c$ أفصول تقاطع $(OM)$ مع $(\Delta)$ على المحور $(\Delta)$
لدينا

$$\tan x=c \qquad \sin x=b \qquad \cos x=a$$

**2) خاصيات**

a)

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{-1}{2}$ | $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\tan x$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $0$ |



b) تكون $\tan(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2}+2k\pi \\ x \neq -\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$ يعني $x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$

c) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $\qquad 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

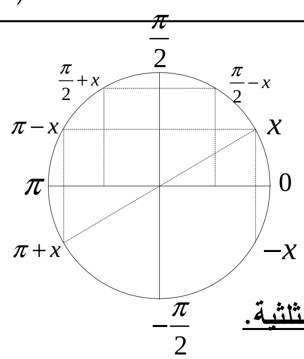
d) $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ $\qquad \sin(x+2k\pi) = \sin x$ $\qquad \tan(x+k\pi) = \tan x$

e) $\cos(-x) = \cos x$ $\qquad \sin(-x) = -\sin x$ $\qquad \tan(-x) = -\tan x$

f)
$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$
$$\tan(\pi - x) = -\tan x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x$$

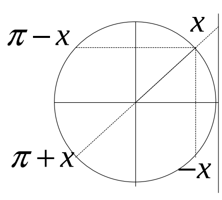
g)
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan x}$$

h) $(\forall x \in \mathbb{R}): -1 \leq \cos x \leq 1 \quad ; \quad -1 \leq \sin x \leq 1$




## 3) المعادلات المثلثية.

a)
$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$$
$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \qquad \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$$
$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$




b)
$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$
$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

c) $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$

**ملاحظات.**

1) إذا كان $\alpha \notin [-1,1]$ فإن المعادلتين $\cos x = a$ و $\sin x = a$ ليس لهما حل.

2) تكون المعادلة $\tan(u(x)) = a$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} u(x) \text{ معرفة} \\ u(x) \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{cases}$

3)
$$-\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha) \qquad -\sin\alpha = \sin(-\alpha) \qquad -\tan\alpha = \tan(-\alpha)$$
$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \qquad \cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

## 4) المتراجحات المثلثية. (انظر التمارين)

**ملاحظة**

1) نضع $f(x) = a\cos(u(x)) + b$ أو $f(x) = a\sin(u(x)) + b$

*) إذا كان $a$ و $b$ غيرمتقابلين وغير متساويين فإن $f(x)$ تغير الإشارة في حلول المعادلة $f(x) = 0$

*) إذا كان $a$ و $b$ متقابلين أو متساويين فإن $f(x)$ لها إشارة ثابتة

2) نضع $f(x): a\tan(u(x)) + b$ $\quad f(x)$ تغير الإشارة في حلول المعادلة $f(x) = 0$ وفي الأعداد التي تكون غير معرفة فيها.

## 5) صيغ التحويل

a)
$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

b)
$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin(2a) = 2\sin a\cos a$$
$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

c)
$$\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$
$$\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$
$$\sin a\cos a = \frac{1}{2}\sin(2a)$$

d)
$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a\sin b = -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

e)
$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$

f) نضع $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ : لدينا .

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

g) من أجل تحويل $f(x) = a\cos x + b\sin x$ نتبع ما يلي:

$$\begin{aligned} f(x) &= a\cos x + b\sin x \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos x\,\cos\alpha + \sin x\,\sin\alpha\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(x-\alpha) \end{aligned}$$

مع $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$