من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

ملخص درس المنطق

العبارات: نسمي عبارة كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا و إما خاطئا و نرمز عادة لعبارة بأحد الرموز p أو q أو r ......
غالبا ما نعبر عن حقيقة عبارة بجدول يسمى جدول حقيقة عبارة : الرمز 1 يعني أن العبارة p صحيحة و الرمز 0 يعني أن العبارة p خاطئة

العمليات على العبارات:

1)نفي عبارة: نرمز لنفي العبارة p بالرمز $\overline{p}$ وتكون صحيحة إذا كانت p خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت p صحيحة
وجدول حقيقة عملية النفي هو : **الجدول 1**

2)عطف عبارتين: عطف عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(q$ و $p)$ والتي تكون صحيحة فقط ا إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا
و جدول حقيقة العطف المنطقي هو : **الجدول 2**

3)فصل عبارتين: فصل عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p$ أو $q)$ والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت العبارتان p و q خاطئتين معا
و جدول حقيقة الفصل المنطقي هو : **الجدول 3**

4)استلزام عبارتين : استلزام عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p \Rightarrow q)$ والتي تكون خاطئة فقط ادا كانت p صحيحة و q خاطئة
وجدول حقيقة الاستلزام المنطقي هو : **الجدول 4**

ملاحظات: العبارة : $(p \Rightarrow q)$ تقرأ : " p تستلزم q " أو " ادا كانت p فان q "
العبارة : $(q \Rightarrow p)$ تسمى الاستلزام العكسي للاستلزام $(p \Rightarrow q)$
للبرهان أن العبارة : $(p \Rightarrow q)$ صحيحة نفترض أن العبارة p صحيحة و نبين أن العبارة q صحيحة

نتيجة: العبارتان $(p \Rightarrow q)$ و q أو $\overline{p}$ متكافئتان

5)تكافؤ عبارتين: تكافؤ عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p \Leftrightarrow q)$ والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا أو خاطئتين معا. وجدول حقيقة الاستلزام المنطقي هو: **الجدول5**
العبارة : $(p \Leftrightarrow q)$ تقرأ : " p تكافئ q "
جدول5 هوحقيقة التكافؤ المنطقي

خاصية : العبارتان $(p \Leftrightarrow q)$ و $\left[(p \Rightarrow q) \text{ و } (q \Rightarrow p)\right]$ متكافئتان

الدالة العبارية: نسمي دالة عبارية كل نص رياضي يحتوي على متغير (أو عدة متغيرات) ينتمي إلى مجموعة معلومة E حيث تصبح عبارة كلما عوضنا المتغير بعنصر من E ونرمز عادة لدالة عبارية بالرمز $A(x)$ أو $B(x)$ أو $A(x;y)$

العبارات المكممة: انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\exists x \in E , A(x)$ " ونقرأ : " يوجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$ " وتكون العبارة " $\exists x \in E , A(x)$ " صحيحة إذا وجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$
انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\forall x \in E , A(x)$ " ونقرأ : "مهما يكن x من E لدينا $A(x)$ "
وتكون العبارة " $\forall x \in E , A(x)$ " صحيحة إذا كانت جميع عناصر E تحقق الخاصية $A(x)$.

خاصية : نفي العبارة " $\forall x \in E , A(x)$ " هو العبارة " $\exists x \in E , \overline{A(x)}$ "
نفي العبارة " $\exists x \in E , A(x)$ " هو العبارة " $\forall x \in E , \overline{A(x)}$ "

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

الجدول 1

p	q	q و p
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

الجدول 2

p	q	q أو p
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

الجدول 3

p	q	$(p \Rightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

الجدول 4

p	q	$(p \Leftrightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

الجدول 5

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

I. المكممات

1.العبارات المكممة

انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\exists x \in E , A(x)$ " ونقرأ : " يوجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$ " وتكون العبارة " $\exists x \in E , A(x)$ " صحيحة إذا وجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$

انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\forall x \in E , A(x)$ "
ونقرأ : " مهما يكن x من E لدينا $A(x)$ "
وتكون العبارة " $\forall x \in E , A(x)$ " صحيحة إذا كانت جميع عناصر E تحقق الخاصية $A(x)$.

مثال1: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

1. $\forall x \in \mathbb{R} / x \geq 0$
2. " $\exists x \in \mathbb{N}, 2x-4=0$ "
3. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2+1=0$
4. $(\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \in \mathbb{N}$
5. $(\exists x \in \mathbb{Z}); \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}$

الأجوبة : 1) صحيحة 2) صحيحة 3) خاطئة 4) خاطئة 5) صحيحة

مثال2: حدد العبارة النافية للعبارات الآتية :

1) $(\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \in \mathbb{N}$ (2 $(\exists x \in \mathbb{Z}): \frac{x}{4} \in \mathbb{Q}$ و $x^2-2=0$

3)توجد نافذة في المؤسسة مكسورة

4)كل الأشجار غير مثمرة في المؤسسة

الأجوبة: 1) $(\exists n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$

2) $(\forall x \in \mathbb{Z}): \frac{x}{4} \notin \mathbb{Q}$ أو $x^2-2 \neq 0$

3)كل نوافذ المؤسسة غير مكسورة

4)توجد شجرة مثمرة في المؤسسة

II.الاستدلالات الرياضية

1. الاستدلال الاستنتاجي :

مثال : ليكن $x \in \mathbb{R}$ بين أن : $\sqrt{2} < x < 5 \Rightarrow 3 < x^2+1 < 26$

الأجوبة :نفترض أن : $\sqrt{2} < x < 5$ ونبين أن : $3 < x^2+1 < 26$

لدينا : $\sqrt{2} < x < 5$ اذن : $2 < x^2 < 25$

اذن : $3 < x^2+1 < 26$

ومنه : $\sqrt{2} < x < 5 \Rightarrow 3 < x^2+1 < 26$

2. الاستدلال بالمثال المضاد :

مثال : بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

p " $(\forall x \in \mathbb{R}^*); x+\frac{1}{x} \geq 2$ "

الجواب : نعتبر : $x=-2$ لدينا : $-2+\frac{1}{-2}=-\frac{5}{2}<2$ اذن : p خاطئة

3. الاستدلال بالتكافؤ:

مثال: بين أن : $(\forall a \in \mathbb{R}); (\forall b \in \mathbb{R})\ \ a^2+b^2 \geq 2ab$

الجواب :نستعمل الاستدلال بالتكافؤ:

$$a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

وهذا صحيح لأن المربع دائما موجب

وبالتالي : $(\forall a \in \mathbb{R}); (\forall b \in \mathbb{R})\ \ a^2+b^2 \geq 2ab$

4. الاستدلال بفصل الحالات :

مثال: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات :حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E): |3x-6|=1$

الجواب :ندرس اشارة : $3x-6$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$3x-6$	$-$ 0 $+$

الحالة 1: اذا كانت : $x \geq 2$ فان : $3x-6 \geq 0$ ومنه : $(E): |3x-6|=1$

$$\Leftrightarrow 3x-6=1 \Leftrightarrow 3x=7 \Leftrightarrow x=\frac{7}{3} \in S$$

الحالة 2: اذا كانت : $x \leq 2$ فان : $3x-6 \leq 0$ ومنه : $(E): |3x-6|=1$

$$\Leftrightarrow -(3x-6)=1 \Leftrightarrow -3x+6=1 \Leftrightarrow -3x=-5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3} \in S$$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S=\left\{\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right\}$

5. الاستدلال بالخلف :

لكي نبرهن أن عبارة صحيحة نفترض أن العبارة خاطئة ونحاول الحصول على تناقض مع المعطيات

مثال1: بين باستعمال الاستدلال بالخلف أن : $\forall x \in \mathbb{R} / \frac{x^2-1}{x^2+1} \neq 1$

الجواب : نفترض أن : $\exists x \in \mathbb{R} / \frac{x^2-1}{x^2+1}=1$

يعني $x^2-1=x^2+1$ يعني $-1=+1$ وهذا غير صحيح

ومنه ما افترضناه كان خاطئا أي : $\forall x \in \mathbb{R} / \frac{x^2-1}{x^2+1} \neq 1$

الأستاذ : عثماني نجيب