السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية	الأعداد العقدية	سلسلة 2

تمرين 1 : اكتب الأعداد التالية على شكلها المثلثي .

$z_1=3+3\boldsymbol{i}$ ، $z_2=1-\boldsymbol{i}$ ، $z_3=-\sqrt{3}-\boldsymbol{i}$ ، $z_4=-\sqrt{2}+\sqrt{6}\,\boldsymbol{i}$

$z_5=13$ ، $z_6=-7$ ، $z_7=11\,\boldsymbol{i}$ ، $z_8=\dfrac{-\boldsymbol{i}}{4}$ ، $z_9=\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7}\,\boldsymbol{i}$

$z_{10}=\cos(\sim)-\boldsymbol{i}\sin(\sim)$ ، $z_{11}=-\cos(\sim)-\boldsymbol{i}\sin(\sim)$ ، $z_{12}=\sin(\sim)+\boldsymbol{i}\cos(\sim)$ ، $z_{13}=1-\cos(2\ \ )+\boldsymbol{i}\sin(2\ \ )$

حيث $\sim\in[-®,®[$ و $\in\left]0,\dfrac{®}{2}\right[$

تمرين 2 :

1) حدد معيار و عمدة العددين العقديين التاليين : $u=\dfrac{\sqrt{6}+\boldsymbol{i}\sqrt{2}}{2}$ ، $v=1-\boldsymbol{i}$

2) اكتب على الشكل المثلثي :

$z_1=uv$ ، $z_2=\dfrac{u}{v}$ ، $z_3=u^5$ ، $z_4=\dfrac{1}{v^7}$ ، $z_5=\dfrac{v^2}{u^3}$ ، $z_6=5u$ ، $z_7=-\boldsymbol{i}v$

تمرين 3 : المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. نعتبر النقط $A(1+3\boldsymbol{i})$ و $B\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{5}{2}\boldsymbol{i}\right)$ و $C(1+2\boldsymbol{i})$

1) أكتب على الشكل المثلثي العدد : $\dfrac{c-a}{b-a}$

2) استنتج حساب القياس الجبري للزاوية $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ و استنتج أن : $AB=AC$

3) استنتج طبيعة المثلث ABC .

تمرين 4 : نعتبر الأعداد العقدية التالية : $u=1+\boldsymbol{i}\sqrt{3}$ و $v=1+\boldsymbol{i}$ و $w=\dfrac{u}{v}$

1) أكتب على الشكل الجبري العدد w

2) اكتب على الشكل المثلثي العددين u و v و استنتج الكتابة المثلثية للعدد w

3) استنتج مما سبق حساب $\sin\left(\dfrac{®}{12}\right)$ و $\cos\left(\dfrac{®}{12}\right)$ و $\tan\left(\dfrac{®}{12}\right)$

تمرين 5 : نعتبر العدد العقدي $Z=\sqrt{6}+\sqrt{2}+\boldsymbol{i}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

1) تحقق أن : $Z^2=8\sqrt{3}+8\boldsymbol{i}$

2) أكتب على الشكل المثلثي العدد : Z^2

3) استنتج عمدة و معيار Z

4) احسب $\sin\left(\dfrac{®}{12}\right)$ و $\cos\left(\dfrac{®}{12}\right)$ و $\tan\left(\dfrac{®}{12}\right)$

السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية	الأعداد العقدية	سلسلة 2

تمرين 1 : اكتب الأعداد التالية على شكلها المثلثي.

$$z_1 = 3+3\boldsymbol{i} = 3(1+\boldsymbol{i}) = 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\boldsymbol{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[3\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_2 = 1-\boldsymbol{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\boldsymbol{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[\sqrt{2}\,;-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_3 = -\sqrt{3}-\boldsymbol{i} = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+\boldsymbol{i}\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \left[2\,;\frac{7\pi}{6}\right]$$

$$z_4 = -\sqrt{2}+\sqrt{6}\,\boldsymbol{i} = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\boldsymbol{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \left[2\sqrt{2}\,;\frac{\pi}{3}\right]$$

$$z_5 = 13 = 13\times 1 = (\cos(0)+\boldsymbol{i}\sin(0)) = [13;0]$$

$$z_6 = -7 = 7\times(-1) = (\cos(\pi)+\boldsymbol{i}\sin\pi) = [7;\pi]$$

$$z_7 = 11\,\boldsymbol{i} = 11\times\boldsymbol{i} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\boldsymbol{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[11;\frac{\pi}{2}\right]$$

$$z_8 = \frac{-\boldsymbol{i}}{4} = \frac{1}{4}\times(-\boldsymbol{i}) = \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)+\boldsymbol{i}\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) = \left[\frac{1}{4};\frac{-\pi}{2}\right]$$

$$z_9 = \frac{1}{7}+\frac{1}{7}\boldsymbol{i} = \frac{1}{7}(1+\boldsymbol{i}) = \frac{\sqrt{2}}{7}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}\right) = \left[\frac{\sqrt{2}}{7}\,;\frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_{10} = \cos(\theta)-\boldsymbol{i}\sin(\theta) = \cos(-\theta)+\boldsymbol{i}\sin(-\theta) = [1;\,-\theta]$$

$$z_{11} = -\cos(\theta)-\boldsymbol{i}\sin(\theta) = \cos(\theta+\pi)+\boldsymbol{i}\sin(\theta+\pi) = [1;\,\theta+\pi]$$

$$z_{12} = \sin(\theta)+\boldsymbol{i}\cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\boldsymbol{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \left[1;\,\frac{\pi}{2}-\theta\right]$$

$$z_{13} = 1-\cos(2\ )+\boldsymbol{i}\sin(2\ ) = 2\sin^2(\ )+2\sin(\ )\cos(\ )\boldsymbol{i} = 2\sin(\ )(\sin(\ )+\boldsymbol{i}\cos(\ ))$$

$$z_{13} = 2\sin(\ )\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\ \right)+\boldsymbol{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\ \right)\right) = \left[2\sin(\ );\,\frac{\pi}{2}-\ \right]$$

(**لأن** : $\ \in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow 2\sin(\ )>0$)

للتذكير،للحصول على الشكل المثلثي للعدد : $z=a+\boldsymbol{i}b$ نعمل بمعيار العدد z أي نكتب: $z=r\left(\frac{a}{r}+\boldsymbol{i}\frac{b}{r}\right)$

حيث $r=\sqrt{a^2+b^2}$ ثم نبحث في جدول القيم الهامة عن الزاوية θ التي تحقق : $\cos(\theta)=\frac{a}{r}$ و $\sin(\theta)=\frac{b}{r}$

ليس من الضروري اتباع الطريقة السابقة في كل الحالات، فمثلا إن تبين لنا عامل مشترك نعمل به أولا ثم نطبق الطريقة على العامل المحصل عليه (مثل z_1 و z_5)

حالات خاصة : $\forall a\in IR^{+*} \quad a=[a,0];\ -a=[a,\pi];\ a\boldsymbol{i}=\left[a,\frac{\pi}{2}\right];\ -a\boldsymbol{i}=\left[a,-\frac{\pi}{2}\right]$

يمكن استعمال خاصيات الكتابة المثلثية أحينا لتحديد الشكل المثلثي لعدد عقدي، مثلا :

$$z_3 = -\sqrt{3}-\boldsymbol{i} = -(\sqrt{3}+\boldsymbol{i}) = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right) = [-2\,;\pi]\times\left[1\,;\frac{\pi}{6}\right] = [-2\,;\pi]\times\left[2\times 1\,;\pi+\frac{\pi}{6}\right] = \left[2;\frac{5\pi}{6}\right]$$

تمرين 2 :

1

$$u=\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}+i\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\left[\sqrt{2}\ ;\ \frac{\pi}{6}\right]$$

$$v=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\left[\sqrt{2}\,;\frac{-\pi}{4}\right]$$

2

$$z_1=u\,v=\left[\sqrt{2}\times\sqrt{2}\,;\frac{\pi}{6}+\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right]=\left[2\ ;\frac{-\pi}{12}\right]$$

$$z_2=\frac{u}{v}=\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}};\frac{\pi}{6}-\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right]=\left[1\,;\frac{5\pi}{12}\right]$$

$$z_3=u^5=\left[\sqrt{2}^5;5\times\frac{\pi}{6}\right]=\left[4\sqrt{2}\ ;\frac{5\pi}{6}\right]$$

$$z_4=\frac{1}{v^7}=\left[\frac{1}{\sqrt{2}^7};-7\times\frac{-\pi}{4}\right]=\left[\frac{1}{8\sqrt{2}}\ ;\frac{7\pi}{4}\right]$$

$$z_5=\frac{v^2}{u^3}=\left[\frac{\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}^3};2\times\left(\frac{-\pi}{4}\right)-3\times\frac{\pi}{6}\right]=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;-\pi\right]$$

$$z_6=5u=[5;0]\times\left[\sqrt{2}\,;\frac{\pi}{6}\right]=\left[5\sqrt{2}\,;\ \frac{\pi}{6}\right]$$

$$z_7=-i\,v=\left[1;\frac{-\pi}{2}\right]\times\left[\sqrt{2}\,;\frac{-\pi}{4}\right]=\left[1\times\sqrt{2}\,;\ \frac{-\pi}{2}+\frac{-\pi}{4}\right]=\left[\sqrt{2}\,;\ \frac{-3\pi}{4}\right]$$

تمرين 3 : المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$. $A(1+3i)$ ، $B\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i\right)$ ، $C(1+2i)$

1

طريقة 1:

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{1+2i-(1+3i)}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i-(1+3i)}=\frac{1+2i-1-3i}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i-1-3i}=\frac{-i}{\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}=\frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}$$

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}i\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{1}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\left[1;\frac{\pi}{3}\right]$$

طريقة 2:

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{1+2i-(1+3i)}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i-(1+3i)}=\frac{1+2i-1-3i}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i-1-3i}=\frac{-i}{\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}=\frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}$$

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{\left[1;\frac{\pi}{2}\right]}{\left[1;\frac{\pi}{6}\right]}=\left[1;\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right]=\left[1;\frac{\pi}{3}\right]$$

2

لدينا : $\frac{c-a}{b-a}=\left[1;\frac{\pi}{3}\right]$ منه : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ و $\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=1$

إذن : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ و $\frac{|c-a|}{|b-a|}=1$ أي $|b-a|=|c-a|$ منه : $AB=AC$

3

بما أن $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ و $AB=AC$ فالمثلث ABC متساوي الأضلاع.

تمرين 4 : $u=1+i\sqrt{3}$ ، $v=1+i$ ، $w=\frac{u}{v}$

1

$$w=\frac{u}{v}=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left((1-i)\right)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i+i\sqrt{3}-i^{2}\sqrt{3}}{1-i^{2}}=$$

$$w=\frac{1+i\left(-1+\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}}{1+1}=\frac{1+\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

2

لدينا : $u=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left[2;\frac{\pi}{3}\right]$ و $v=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$

منه : $w=\frac{u}{v}=\frac{\left[2;\frac{\pi}{3}\right]}{\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]}=\left[\frac{2}{\sqrt{2}};\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right]=\left[\sqrt{2}\,;\frac{\pi}{12}\right]$

3

لدينا حسب السؤال 2 : $w=\left[\sqrt{2}\,;\frac{\pi}{12}\right]=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}+i\,\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}$

و حسب السؤال الأول : $w=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

إذن : $\begin{cases}\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\\ \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{cases}$ بالتالي : $\begin{cases}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases}$

و منه : $\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^{2}}{3-1}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$

تمرين 5 : $Z=\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

1

$$Z^{2}=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right)^{2}=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^{2}+2i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)+i^{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^{2}$$

$$Z^{2}=8+2\sqrt{12}+8i-\left(8-2\sqrt{12}\right)=4\sqrt{12}+8i=8\sqrt{3}+8i$$

2

$$Z^{2}=8\sqrt{3}+8i=8\left(\sqrt{3}+i\right)=8\times2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\left[16;\frac{\pi}{6}\right]$$

3

نضع : $Z=[r;\theta]$ حيث : $r\in IR^{+*}$ و $\theta\in\left]-0;2\pi\right]$ إذن : $Z^{2}=\left[r^{2};2\theta\right]$

نستنتج إذن أن: $r^{2}=16$ منه : $\boxed{r=4}$ و أن $2\theta\equiv\frac{\pi}{6}+2k\pi\,/\,k\in Z$ أي : $\theta\equiv\frac{\pi}{12}+k\pi\,/\,k\in Z$

و بما أن : $\theta\in\left]0;2\pi\right]$ فإن : $0<\frac{\pi}{12}+k\pi\le2\pi$

منه : $\frac{-\pi}{12}<k\pi\le\frac{23\pi}{12}$ منه : $\frac{-1}{12}<k\le\frac{23}{12}$ منه : $k=0$ أو $k=1$ ، منه : $\theta=\frac{\pi}{12}$ أو $\theta=\frac{13\pi}{12}$

لكن و لكون : $\mathrm{Re}(Z)>0$ فإن : $\cos\theta>0$ ، إذن : $\boxed{\theta=\frac{\pi}{12}}$ (لأن : $\pi<\frac{13\pi}{12}<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)<0$

بالتالي : $\boxed{Z=\left[4;\frac{\pi}{12}\right]}$

تحديد الشكل المثلثي لعدد عقدي انطلاقا من الشكل المثلثي لمربعه أو مكعبه أو بصفة عامة قوة له يتطلب تقنيات خاصة حيث نعطي رموزا لمعياره و عمدته، ثم نحاول تحديدهما مستعملين وحدانية الشكل المثلثي و الجبري ، و نحتاج خلال ذلك للتأطير لحصر قيم العدد k و بالتالي حصر قيم العمدة ثم تحديده انطلاقا من إشارة الجزء الحقيقي أو التخيلي

4

لدينا حسب السؤال 2 : $Z=\left[4\,;\frac{\circledR}{12}\right]=4\left(\cos\frac{\circledR}{12}+\boldsymbol{i}\sin\frac{\circledR}{12}\right)=4\cos\frac{\circledR}{12}+4\sin\frac{\circledR}{12}\,\boldsymbol{i}$

و حيث أن : $Z=\sqrt{6}+\sqrt{2}+\boldsymbol{i}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ فإن : $\begin{cases}4\cos\frac{\circledR}{12}=\sqrt{6}+\sqrt{2}\\ 4\sin\frac{\circledR}{12}=\sqrt{6}-\sqrt{2}\end{cases}$ بالتالي : $\begin{cases}\cos\frac{\circledR}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{\circledR}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases}$

و منه : $\tan\frac{\circledR}{12}=\frac{\sin\frac{\circledR}{12}}{\cos\frac{\circledR}{12}}=\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}=\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{6-2}=\frac{8+2\sqrt{12}}{4}=2+\sqrt{3}$

لاحظ أن نتائج هذا التمرين تطابق نتائج التمرين السابق