السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	**الأعداد العقدية**	سلسلة 4

تمرين 1 :

1) أوجد الجذرين المربعين للعدد : $\Delta = -7 - 24\boldsymbol{i}$

2) حل في C المعادلة : $z^2 - (1+2\boldsymbol{i})\,z + (1+7\boldsymbol{i}) = 0$

تمرين 2 : حل في C المعادلة : $\boldsymbol{i}\,z^2 + \left(1+\sqrt{3}\,\boldsymbol{i}\right) z + \sqrt{3} = 0$

تمرين 3 : نعتبر في C المعادلة : $(E)\ :\ 2z^2 - 2(\sim + \boldsymbol{i})\,z + \sim^2 - 1 = 0$ حيث $\sim \in]1;+\infty[$

1) حل في C المعادلة : (E)

2) اكتب حلي هذه المعادلة z_1 و z_2 على الشكل المثلثي ($\mathrm{Re}(z_1) < \mathrm{Re}(z_2)$)

تمرين 4 : نعتبر في C الحدودية : $\mathrm{P}(z) = z^3 + (1-3\boldsymbol{i})z^2 - (2+3\boldsymbol{i})z - 2$

1) بين أن الحدودية P تقبل جذرا تخيليا صرفا z_0 وحدده

2) حل في C المعادلة : $\mathrm{P}(z) = 0$

تمرين 5 : نعتبر في C المعادلة : $(E)\ :\ z^3 - 2(2+3\boldsymbol{i})z^2 - 4(1-5\boldsymbol{i})z + 16(1-\boldsymbol{i}) = 0$

1) بين أن المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا z_0 وحدده .

2) حل في C المعادلة (E)

تمرين 6 : نعتبر في C المعادلة : $(E)\ :\ a\,z^2 - \boldsymbol{i}\left(a^4+1\right) z - a^3 = 0$ حيث $a \in \mathbf{C}^*$

1) حدد قيم العدد العقدي a التي يكون من أجلها يكون للمعادلة (E) حل وحيد .

2) نفترض فيما يلي أن $a^2 \neq 1$

أ) حل في C المعادلة : (E)

ب) ليكن r معيار العدد a و $\bar{}$ عمدته. اكتب على الشكل المثلثي حلي المعادلة (E) بدلالة r و $\bar{}$.

3) حدد قيم a التي يكون من أجلها حلي المعادلة متقابلان .

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الأعداد العقدية حلول مقترحة	سلسلة 4

تمرين 1 :

1

نضع : $\text{¢} = a+b\,i$ حيث $(a;b)\in IR^2$

$$\text{¢}^2=\Delta \iff \begin{cases} a^2-b^2+2ab\,i=-7-24i \\ \left|\text{¢}\right|^2=\left|\Delta\right|^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2-b^2=-7 \\ 2ab=-24 \\ a^2+b^2=25 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2=18 \\ 2b^2=32 \\ ab=-12 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2=9 \\ b^2=16 \\ ab=-12 \end{cases}$$ لدينا :

$$\text{¢}^2=\Delta \iff \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases} \ ou \ \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases}$$

بالتالي جذرا Δ المربعين هما : $\text{¢}_1=3-4i$ و $\text{¢}_2=-3+4i$

رغم أنه في غالب الأحيان يطلب فقط التحقق من الجذرين المربعين لكن الالمام بطريقة تحديد الجذرين أمر مهم و ينبغي التمكن منه رغم صعوبة الحسابات أحيانا.

2

لنحل في C المعادلة: $z^2-(1+2i)\,z+(1+7i)=0$

لدينا : $\Delta=(1+2i)^2-4(1+7i)=1+4i-4-4-28i=-7-24i=(3-4i)^2$

إذن : $z_1=\dfrac{1+2i+3-4i}{2}=2-i$ و $z_2=\dfrac{1+2i-3+4i}{2}=-1+3i$

بالتالي : $S=\{2-i\ ;\ -1+3i\}$

تمرين 2 :

لنحل في C المعادلة: $i\,z^2+\left(1+\sqrt{3}\,i\right)z+\sqrt{3}=0$

لدينا : $\Delta=\left(1+\sqrt{3}i\right)^2-4\sqrt{3}\,i=1+2\sqrt{3}\,i-3-4\sqrt{3}\,i=1-2\sqrt{3}\,i-3=\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^2$

إذن : $z_1=\dfrac{-1-\sqrt{3}i+1-\sqrt{3}i}{2i}=\dfrac{-2\sqrt{3}i}{2i}=-\sqrt{3}$ و $z_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i-1+\sqrt{3}i}{2i}=\dfrac{-2}{2i}=i$

بالتالي : $S=\left\{i\ ;-\sqrt{3}\right\}$

لا داعي لتحديد الجذرين المربعين للمحددة لأننا نستطيع بسهولة التعرف على متطابقة هامة شبيهة بالتي نشرنا

تمرين 3 : $(E)\ :\ 2z^2-2(\sim+i)\,z+\sim^2-1=0$ ، $\sim\in]1;+\infty[$

1

لدينا :

$$\Delta=4(\sim+i)^2-8\left(\sim^2-1\right)=4\left(\sim^2+2\sim i-1\right)-8\sim^2+8=4\sim^2+8\sim i-4-8\sim^2+8$$

$$\Delta=-4\sim^2+8\sim i+4=-4\left(\sim^2-2\sim i-1\right)=(2i)^2(\sim-i)^2=(2\sim i+2)^2$$

إذن : $z_1=\dfrac{2(\sim+i)-2(\sim i+1)}{4}=\dfrac{\sim-1}{2}-\dfrac{\sim-1}{2}i$ و $z_2=\dfrac{2(\sim+i)+2(\sim i+1)}{4}=\dfrac{\sim+1}{2}+\dfrac{\sim+1}{2}i$

بالتالي : $S=\left\{\dfrac{\sim-1}{2}-\dfrac{\sim-1}{2}i\ ;\ \dfrac{\sim+1}{2}+\dfrac{\sim+1}{2}i\right\}$

2

$$z_1=\frac{\sim-1}{2}-\frac{\sim-1}{2}i=\frac{\sim-1}{2}(1-i)=\frac{\sim-1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\left[\frac{\sim-1}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{-\text{®}}{4}\right]$$

$$z_2=\frac{\sim+1}{2}+\frac{\sim+1}{2}i=\frac{\sim+1}{2}(1+i)=\frac{\sim+1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\left[\frac{\sim+1}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{\text{®}}{4}\right]$$

(لأن : $\dfrac{\sim-1}{\sqrt{2}}>0$ و $\dfrac{\sim+1}{\sqrt{2}}>0$)

تمرين 4 : $P(z)=z^3+(1-3i)z^2-(2+3i)z-2$

1

ليكن $a\in IR$ نضع : $z_0=ai$

لدينا :

$$P(z_0)=0 \Leftrightarrow -a^3i-(1-3i)a^2-a(2+3i)i-2=0 \Leftrightarrow -a^3i-a^2+3a^2i-2ai+3a-2=0$$

$$P(z_0)=0 \Leftrightarrow -a^2+3a-2+(-a^3+3a^2-2a)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases}-a^2+3a-2=0\\ -a^3+3a^2-2a=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-3a+2=0\\ -a(a^2-3a+2)=0\end{cases}$$

$$P(z_0)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-3a+2=0\\ a=0\end{cases} ou \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-3a+2=0\\ a^2-3a+2=0\end{cases} \Leftrightarrow a^2-3a+2=0 \Leftrightarrow a=1 \ ou \ a=2$$

إذن الحدودية P تقبل جذرين تخيليين صرفين هما $z_0=i$ و $z_1=2i$

- يمكننا ببساطة إجراء التكافؤات أعلاه في البحث أما الجواب فيكفي أن نحسب مثلا $P(i)$ و نجد 0
- المطلوب أن نجد حلا تخيليا صرفا واحدا لكننا وجدنا اثنين ، في الجواب يمكن الاكتفاء بأحدهما، لكن هذه النتيجة ستكون مفيدة في السؤال الموالي

2

بما أن كلا من $z_0=i$ و $z_1=2i$ جذر للحدودية P فإن هذه الأخيرة ستقبل القسمة على $z-i$ و $z-2i$

إذن توجد حدودية Q من الدرجة الأولى معاملاتها أعداد عقدية تحقق : $\begin{cases}P(z)=Q(z)(z-i)(z-2i)\\ Q(z)=az+b \ /(a,b)\in C^*\times C\end{cases}$

$$P(z)=(az+b)(z-i)(z-2i) \Rightarrow \begin{cases}P(0)=b\times(-i)\times(-2i)=-2b\\ P(-i)=(-ai+b)\times(-2i)\times(-3i)=-6(-ai+b)\end{cases}$$

لدينا :

$$P(z)=(az+b)(z-i)(z-2i) \Rightarrow \begin{cases}-2=-2b\\ i-(1-3i)+(2+3i)i-2=6ai-6b\end{cases}$$

$$P(z)=(az+b)(z-i)(z-2i) \Rightarrow \begin{cases}b=1\\ -6+6i=6ai-6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=1\\ a=\frac{6i}{6i}=1\end{cases}$$

بالتالي : $P(z)=(z+1)(z-i)(z-2i)$

بالتالي مجموعة حلول المعادلة : $P(z)=0$ هي : $S=\{-1;\ i\ ;\ 2i\}$

- الطريقة الاعتيادية لحل مثل هذا السؤال هي إجراء القسمة الإقليدية، لكننا آثرنا إدراج طريقة مختلفة قصد توسيع المعارف، اختيار العددين 0 و $-i$ جاء لتكون الحسابات أبسط ما يمكن
- كان يمكن تحديد العدد العقدي a بطريقة أبسط لكن هذه الطريقة تتطلب تعاريف لا تدرس حاليا في مستوى البكالوريا

تمرين 5 : نعتبر في C المعادلة : $(E)\ :\ z^3-2(2+3i)z^2-4(1-5i)z+16(1-i)=0$

1

ليكن $a\in IR$ نضع : $z_0=a$ و $P(z)=z^3-2(2+3i)z^2-4(1-5i)z+16(1-i)$

لدينا :

$$P(z_0)=0 \Leftrightarrow a^3-2(2+3i)a^2-4(1-5i)a+16(1-i) \Leftrightarrow a^3-4a^2-6a^2i-4a+20ai+16-16i=0$$

$$P(z_0)=0 \Leftrightarrow a^3-4a^2-4a+16+(-6a^2+20a-16)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}a^3-4a^2-4a+16=0\\ -6a^2+20a-16=0\end{cases}$$

$$P(z_0)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}a^2(a-4)-4(a-4)=0\\ 3a^2-10a+8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-4)(a^2-4)=0\\ 3a^2-6a-4a+8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-4)(a-2)(a+2)=0\\ 3a(a-2)-4(a-2)=0\end{cases}$$

$$P(z_0)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}a=4 \ ou \ a=2 \ ou \ a=-2\\ a=2 \ \ ou \ \ a=\frac{4}{3}\end{cases} \Leftrightarrow a=2$$

إذن المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا $z_0 = 2$.

2

لدينا :

$$
\begin{array}{l|l}
z^3 - 2(2+3i)z^2 - 4(1-5i)z + 16(1-i) & z-2 \\
\hline
\underline{z^3 - 2z^2} & z^2 + (-2-6i)z + (-8+8i) \\
0 \quad (-2-6i)z^2 - 4(1-5i)z & \\
\quad \underline{(-2-6i)z^2 + (4+12i)z} & \\
\qquad 0 \quad (-8+8i)z + 16(1-i) & \\
\qquad\quad \underline{(-8+8i)z + 16 - 16i} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

إذن $P(z) = (z-2)\left(z^2 - 2(1+3i)z - 8 + 8i\right)$ منه: $z^2 - 2(1+3i)z - 8 + 8i = 0$ $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2 \; ou$

ولدينا : $\Delta = 4(1+3i)^2 - 4(-8+8i) = 4(1+6i-9+8-8i) = 4(-2i) = 4(1-i)^2$

إذن: $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2 \; ou \; z = \dfrac{2(1+3i)+2(1-i)}{2} \; ou \; z = \dfrac{2(1+3i)-2(1-i)}{2}$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2 \; ou \; z = 2+2i \; ou \; z = 4i$

بالتالي : $S = \{2 \,; 2+2i \,; 4i\}$

لاحظ أهمية المتساوية الهامة : $(1-i)^2 = -2i$ و $(1+i)^2 = 2i$ لتفادي البحث عن الجذور المربعة كما في التمرين الأول

تمرين 6 :

نعتبر في C المعادلة : $(E) \; : \; a z^2 - i\,(a^4+1)\,z - a^3 = 0$ حيث $a \in \mathbf{C}^*$

1

لدينا : $\Delta = \left(i\,(a^4+1)\right)^2 + 4a^4 = -(a^8 + 2a^4 + 1) + 4a^4 = -(a^8 - 2a^4 + 1) = -(a^4-1)^2$

منه : $\Delta = 0 \Leftrightarrow a^4 = 1 \Leftrightarrow (a^2-1)(a^2+1) = 0 \Leftrightarrow (a-1)(a+1)(a-i)(a+i) = 0 \Leftrightarrow a \in \{1; -1; i \,; -i\}$

وجب الاحتياط في هذا السؤال ففي المجموعة C وعكس المجموعة IR : $a^n = 1$ لا تعني $a = 1$ سواء كان الأس زوجيا أم فرديا، بل a يمثل جذرا نونيا للعدد 1، بمعنى هناك n قيمة للعدد a

2

أ) لدينا : $\Delta = \left(i\,(a^4-1)\right)^2$

منه : $z_1 = \dfrac{i(a^4+1) + i\,(a^4-1)}{2a} = \dfrac{2a^4 i}{2a} = a^3 i$ و $z_2 = \dfrac{i(a^4+1) - i\,(a^4-1)}{2a} = \dfrac{2i}{2a} = \dfrac{i}{a}$

بالتالي : $S = \left\{a^3 i \,; \dfrac{i}{a}\right\}$

ب) لدينا $i = \left[1; \dfrac{\pi}{2}\right]$ و $a = [r; \theta]$ منه : $a^3 = [r^3; 3\theta]$ منه : $z_1 = \left[r^3; 3\theta + \dfrac{\pi}{2}\right]$ و $z_2 = \left[\dfrac{1}{r}; \dfrac{\pi}{2} - \theta\right]$

3

$z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{i(a^4+1)}{2a} = 0 \Leftrightarrow a^4 = -1 \Leftrightarrow a^4 = i^2 \Leftrightarrow (a^2 = i) \, ou \, (a^2 = -i)$

$z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow \left(a^2 = \dfrac{1}{2}(1+i)^2\right) ou \left(a^2 = \dfrac{1}{2}(1-i)^2\right)$

$z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow a \in \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i) ; \dfrac{-\sqrt{2}}{2}(1+i) ; \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \,; \dfrac{-\sqrt{2}}{2}(1-i)\right\}$

القيم المحصل عليها ثم الجذور من الدرجة الرابعة للعدد -1

مرة أخرى لاحظ أهمية : $(1-i)^2 = -2i$ و $(1+i)^2 = 2i$