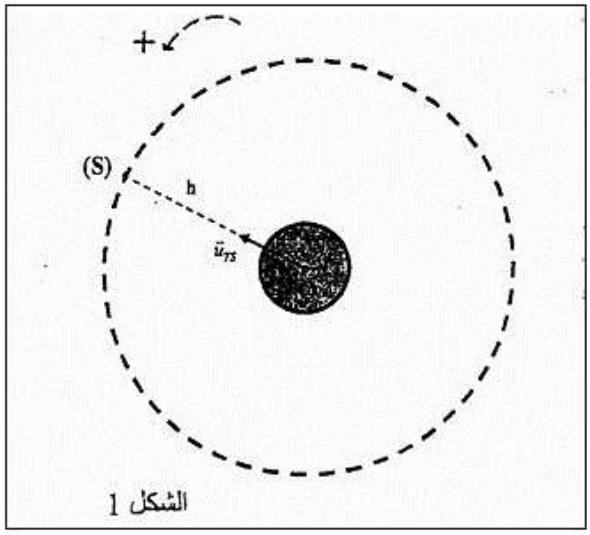
تمارين الاقمار الإصطناعية

تمرين 1 :

زرقاء اليمامة قمر اصطناعي مغربي يقوم بمهام مراقبة الحدود الجغرافية للمملكة و بالتواصل و الاستشعار عن بعد .
وقد أنجز هذا القمر من طرف خبراء المركز الملكي للاستشعار البعدي الفضائي بتعاون مع خبراء دوليين .
تم وضع زرقاء اليمامة في مداره يوم 10 دجنبر 2001 على ارتفاع h من سطح الأرض .
ينجز هذا القمر الإصطناعي (S) حوالي 14 دورة حول الأرض في اليوم الواحد .
نفترض مسار (S) دائريا ، وندرس حركته في المرجع الأرضي ذات تماثل كروي لتوزيع الكتلة .
كما نهمل أبعاد (S) أمام المسافات الفاصلة بينه وبين مركز الأرض .



الشكل 1

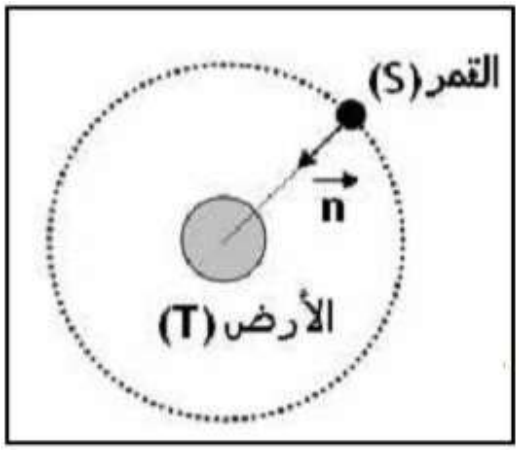
معطيات :

ثابتة التجاذب الكوني :	$G=6,67.10^{-11}$ S.I
شدة مجال الثقالة على سطح الأرض :	$g_0=9,8\ m.s^{-2}$
شعاع الأض :	$r_T=6350$ km
دور دوران الأرض حول محورها :	$T=84164$ s
ارتفاع (S) عن سطح الأرض :	$h=1\ 000$ km

1-أنقل تبيانة الشكل 1 ومثل عليها متجهة السرعة $\vec{V}_S$ للقمر الإصطناعي للقمر (S) ومثل كذلك متجهة قوة التجاذب الكوني التي تطبقها الأرض على (S).
2-أعط تعبير المتجهي لقوة التجاذب الكوني التي تطبقها الأرض على (S) .
3-أكتب في أساس فريني تعبير متجهة التسارع لحركة (S).
4-بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على (S) :
4.1-بين أن حركته منتظمة.
4.2-أكتب تعبير V_S بدلالة g_0 و h و r_T و احسب قيمتها .
5-بين أن كتلة الأرض هي : $M_T \approx 6.10^{24}$ kg .
6-بين ان قمر اصطناعي (S) لا يبدو ساكنا بالنسبة لملاحظ أرضي .
7-يدور القمر الإصطناعي (S') حول الأرض بسرعة زاوية ω بحيث يبدو ساكنا بالنسبة لملاحظ أرضي و يرسل صورا إلى الأرض تعتمد في التوقعات في التوقعات الجوية.
7.1-أثبت العلاقة التالية : $\omega^2.(r_T + z)^3 = cte$ ، حيث z ارتفاع (S') عن سطح الأض.
7.2-أوجد قيمة z.

تمرين 2 : مقارنة كتلتي الأرض و الشمس

تمكن كل من دراسة حركة الأرض حول الشمس ودراسة حركة الأقمار الإصطناعية حول الأرض ، من مقارنة كتلة الشمس m_s و كتلة الأض m_T .



معطيات :

- الدور المداري لحركة الأرض حول الشمس : $T_T = 365\ jours$
- شعاع المدار الدائري لحركة مركز الأرض حول الشمس : $r_T = 15.10^8\ km$
- دور الأرض حول مدارها القطبي : $T_0 = 1\ jour$

نعتبر قمرا اصطناعيا (S) ساكنا بالنسبة للأرض ، كتلته m_0 ومساره في المرجع المركزي الأرضي دائري شعاعه $r_0 = 4,2.10^4 km$.

نهمل تأثير باقي الكواكب على الأرض (T) والقمر الإصناعي (S) .أنظر الشكل جانبه .

1-أذكر الشروط التي يجب أن تتوفر لكي يكون قمرا اصطناعيا ساكنا بالنسبة للأرض .
2-بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على القم الإصطناعي (S) في المعلم المركزي الأرضي ، أثبت أن تعبير متجهة تسارع مركز قصور القمر الإصطناعي (S) هو : $\vec{a} = \frac{G.m_T}{r_0^2}.\vec{n}$ ، حيث G ثابتة التجاذب الكوني ، و $\vec{n}$ المتجهة الواحدية لمعلم فريني .
3-بين أن حركة القمر الإصناعي (S) في المعلم المركزي الأرضي ، دائرية منتظمة و استنتج تعبير سرعته .
4-استنتج بدلالة G و m_T و r_0 ، تعبير الدور المداري T للقمر الإصطناعي حول الأرض .
5-يعبر عن القانون الثالث لكبلير بالعلاقة : $\frac{T^2}{r_0^2} = K$ ، أوجد تعبير الثابتة K بدلالة G و m_T .
6-حدد تعبير النسبة $\frac{m_S}{m_T}$ بدلالة r_T و r_0 و T_T و T_0 ، أحسب هذه القيمة .

تمرين 3 :

جاليليو هو ثمرة لجهود المفوضية الأوروبية ووكالة الفضاء الأوروبية لإنشاء نظام إرشاد ملاحي وتحديد مواقع بدقة عالية.
وهو أول نظام عالمي لتحديد المواقع للاستخدام المدني تمتلكه مجموعة من الدول على اساس تجاري وتقديم خدمات مدنية لا تقدمها الأنظمة العسكرية الحالية : النظام الأمريكي (GPS) والنظام الروسي $(GLONASS)$.
ويعتمد هذا النظام على مجموعة فضائية تضم 30 قمرا اصطناعيا تدو حول الأرض على ارتفاع 24 كيلومتر .
ومجموعة محطات مراقبة في أنحاء مختلفة من العالم ومحطتي تحكم في أوروبا .
أول أقمار نظام غاليليو هو $GIOVE\ A$ وأطلق في مداره يوم 28 دجنبر 2005 .
معطيات :
-ثابتة التجاذب الكوني : $G = 6,67.10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$
-نعتبر الأرض كروية الشكل ومتجانسة مركزها O وشعاعها : $R_T = 6,38.10^3\ km$
-كتلة الأرض : $M_T = 5,98.10^{24}\ kg$
-نعتبر القمر الإصطناعي $GIOVE\ A$ نقطة مادية G كتلتها $m = 700\ kg$ وخاضع فقط للتأثير التجاذبي الأرضي.
حركة القمر الإصطناعي دائرية منتظمة مركزها O على ارتفاع $h = 23,6\ .10^3\ km$.

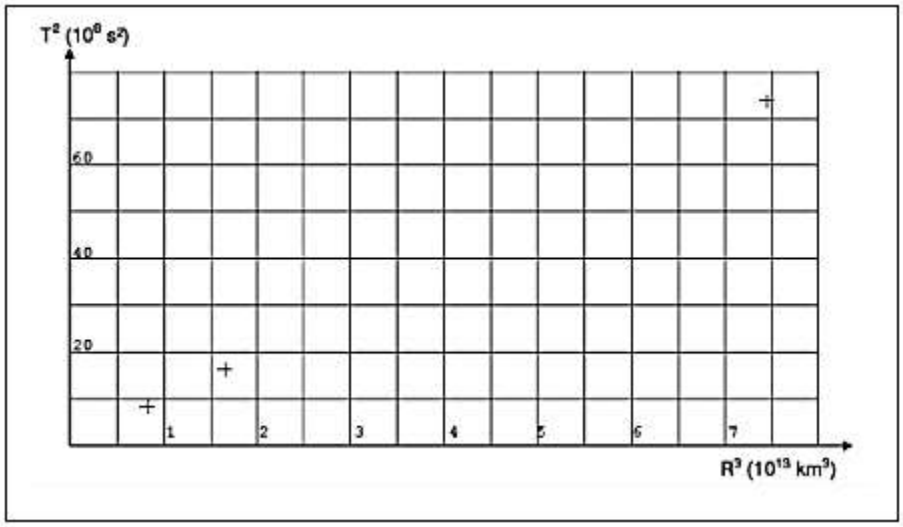
الجزء الأول : حركة G حول الأرض

1- أ- مثل في تبيانة وبدون سلم ، الأرض والقمر الإصطناعي ومساره والقوة المطبقة عليه من طرف الأرض.
ب- أعط التعبير المتجهي لهذه القوة باستعمال الرموز الواردة في النص . نرمز بالرمز $\vec{u}$ للمتجهةالواحدية الموجهة من O إلى G .
2- أ- في أي مرجع تدرس حركة G .
ب- ما هو الإفتراض الذي يجب الإدلاء به لتطبيق القانون الثاني لنيوتن ؟
ج- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على G حدد تعبير متجهة تسارعه .
3- أ- أعط مميزات متجهة التسارع لنقطة مادية لها حركة دائرية.
ب- بين ان السرعة V للقمر الإصطناعي تحقق العلاقة التالية : $V^2 = G.\frac{M_T}{R}$ مع : $R = R_T + h$
4- أ- عرف الدور المداري T للقمر الإصطناعي . وأعط تعبيره بدلالة G و M_T و R .
ب- أحسب قيمة الدور T.

الجزء الثاني : مقارنة مع أقمار اصطناعية أخرى

يعطي الجدول التالي قيم الدو المداري وشعاع المسار للأقمار الإصطناعية الموجودة في النظامين (GPS) و $(GLONASS)$ و كذا أقمارا $(METEOSAT)$ المستعملة في مراقبة الأحوال الجوية .

القمر الإصطناعي	شعاع المسار $R(km)$	الدور المداري $T(s)$	$R^3(km^3)$	$T^2(s^2)$
GPS	$20{,}2.10^3$	$2{,}88.10^4$	$8{,}24.10^{12}$	$8{,}29.10^8$
$GLONASS$	$25{,}5.10^3$	$4{,}02.10^4$	$1{,}66.10^{13}$	$1{,}62.10^9$
$GOVE\ A$				
$METEOSAT$	$42{,}1.10^3$	$8{,}58.10^4$	$7{,}46.10^{13}$	$7{,}36.10^9$



1- أ-أتمم ملأ سطر الجدول الخاص بالقمر $GEOVE\ A$ (غاليليو).

ب-مثل النقطة المقابلة الخاصة بالقمر $GEOVE\ A$ في المبيان التالي ثم خط المنحنى الذي يعطي T^2 بدلالة R^3.

2- أ-ماذا يمكن استنتاجه من هذا المبيان.

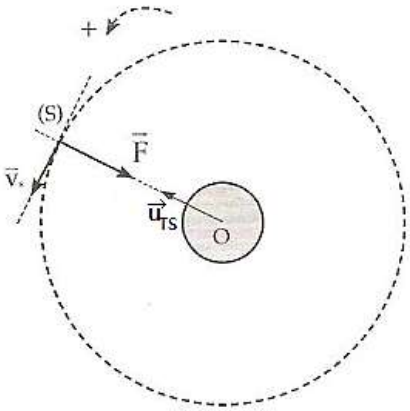
ب- بين ان نتيجة السؤال I-4 تطابق المبيان .

ج- ما اسم القانون الذي يبرزه المبيان؟

التصحيح

تمرين 1

1-تمثيل متجهة السرعة $\vec{V}_S$ للقمر الإصطناعي (S) و متجهة قوة التجاذب الكوني $\vec{F}$



اتجاه القوة $\vec{F}$ هو اتجاه المتجهة الواحدية $\vec{u}_{TS}$ ومنحاها معاكس لمنحى $\vec{u}_{TS}$.

اتجاه $\vec{V}_S$ عمودي على اتجاه $\vec{F}$ ومنحاها هو منحى الحركة .

2-التعبير المتجهي لقوة التجاذب الكوني التي تطبقها الأرض

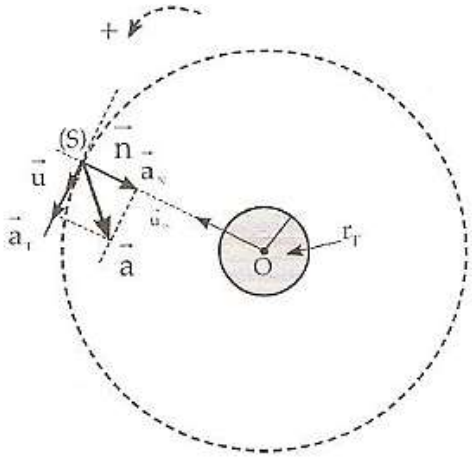
$$\vec{F} = -G.\frac{M_T.m}{(r_T+h)^2}.\vec{u}_{TS}$$

حيث M_T : كتلة الأرض و m_S : كتلة القمر الإصطناعي .

3-تعبير متجهة التسارع لحركة (S) في اساس فريني

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \Rightarrow \vec{a} = a_T.\vec{u} + a_N.\vec{n}$$

مع : $a_T = \frac{dv}{dt}$ التسارع المماسي و $a_N = \frac{V^2}{R}$ التسارع المنظمي



4.1-إثبات انتظام الحركة

تطبيق القانون الثاني لنيوتن على (S) لدينا : $\vec{F} = m.\vec{a}$ أي : $m.\vec{a} =$

$-G.\frac{M_T.m_S}{(r_T+h)^2}.\vec{u}_{TS}$

نستنتج التسارع : $\vec{a} = -G.\frac{M_T}{(r_T+h)^2}.\vec{u}_{TS}$

في معلم فريني $(S,\vec{u},\vec{n})$ متجهة التسارع تكتب : $\vec{a} = G.\frac{M_T}{(r_T+h)^2}.\vec{n}$

حيث $\vec{n} = -\vec{u}_{TS}$

إذن : $a_T = 0$

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

يعني ان السرعة ثابتة $(V = cte)$ وحركة S منتظمة .

4.2-تعبير V_S

باعتبار التسارع منظميا ، فإن : $a = a_N$

$$\frac{V_S^2}{r_T+h} = \frac{G.M_T}{(r_T+h)^2}$$

$$V_S^2 = \frac{G.M_T}{r_T + h}$$

$$\boldsymbol{V_S = \sqrt{\frac{G.M_T}{r_T + h}}}$$

لنعبر عن الجداء $G.M_T$ بدلالة V_S :

باعتبار الثقالة ناتجة فقط عن التجاذب ، فإن وزن القمر الإصطناعي يساوي قوة التجاذب المطبقة عليه : $P = F$

$$\mathrm{m.g} = \mathrm{G}.\frac{M_T.m}{(r_T + h)^2} \Rightarrow g = G.\frac{M_T}{(r_T + h)^2}$$

عند سطح الأرض حيث $h = 0$:

$$g_0 = \frac{G.M_T}{{r_T}^2} \Rightarrow G.M_T = g_0.{r_T}^2$$

نعوض في تعبير السرعة نحصل على :

$$\boldsymbol{V_S = \sqrt{\frac{g_0.{r_T}^2}{r_T + h}} \Rightarrow V_S = r_T\sqrt{\frac{g_0}{r_T + h}}}$$

ت.ع :

$$V_S = 6350 \times 10^3 \times \sqrt{\frac{9{,}8}{6350 \times 10^3 + 1000 \times 10^3}} \Rightarrow \boldsymbol{V_S = 7332{,}35\ m.s^{-1}}$$

5-كتلة الأرض

باستعمال العلاقة : $G.M_T = g_0.{r_T}^2$ نحصل على : $\boldsymbol{M_T = \frac{g_0.{r_T}^2}{G}}$

ت.ع :

$$\boldsymbol{M_T = \frac{9{,}8 \times (6350 \times 10^3)^2}{6{,}67 \times 10^{-11}} = 5{,}92.10^{24}\ kg}$$

6-إثبات ان القمر الإصطناعي لا يبدو ساكنا :

في يوم واحد ينجز القمر الإصطناعي 14 دورة حول الأرض ، التي تنجز فقط دورة واحدة أي أن : $T \approx 14T_S$. ($T \neq T_S$)

هذا يعني أن دوري حركتهما مختلفتان وبالتالي لا يبدو S ساكنا بالنسبة لملاحظ أرضي .

7.1-إثبات العلاقة : $\omega^2.(r_T + z)^3 = cte$

تعبير سرعة القمر S' هي : $V_{S'} = \sqrt{\frac{G.M_T}{r_T+z}}$

ونعبر عنها أيضا بالعلاقة : $V_{S'} = (r_T + z)\omega$ أي : $\sqrt{\frac{G.M_T}{r_T+z}} = (r_T + z)\omega$

$$\frac{G.M_T}{r_T + z} = (r_T + z)^2.\omega^2$$

$$\boldsymbol{(r_T + z)^3.\omega^2 = G.M_T}$$

$$\omega^2.(r_T + z)^3 = cte$$

7.2-قيمة الإرتفاع z

باستعمال العلاقة :

$$\omega^2.(r_T+z)^3 = G.M_T$$

نستنتج : $(r_T+z)^3 = \frac{G.M_T}{\omega^2} \Rightarrow r_T+z = \sqrt[3]{\frac{G.M_T}{\omega^2}} \Rightarrow r_T = \sqrt[3]{\frac{G.M_T}{\omega^2}} - z$ و

بما أن القمر الإصطناعي ساكن بالنسبة للأرض ، فإن سرعته الزاوية تساوي السرعة الزاوية للأرض ومنه : $T = T'$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

نعوض في العلاقة السابقة :

$$\boldsymbol{z = \sqrt[3]{\frac{G.M_T.T^2}{4\pi^2}} - r_T \Rightarrow z = \sqrt[3]{\frac{g_0.r_T^2.T^2}{4\pi^2}} - r_T}$$

ت.ع :

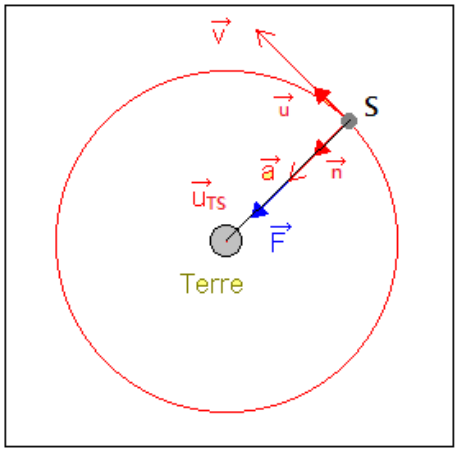
$$z = \sqrt[3]{\frac{9{,}8 \times (6350 \times 10^3)^2 \times 84164^2}{4\pi^2}} - 6350 \times 10^3$$

$$\boldsymbol{z = 3{,}50.10^7\ m = 35\ 000\ km}$$

تمرين 2 :

1- شروط التي يجب أن تتوفر لكي يكون قمرا اصطناعيا ساكنا بالنسبة للأرض

- ✓ ينبغي أن يقع مداره في مستوى خط الإستواء
- ✓ أن يدور في نفس منحى دوران الارض حول محورها القطبي
- ✓ أن يكون دوره المداري مساويا لدور حركة الدوران للأرض



2-إثبات تعبير متجهة التسارع

يخضع القمر الإصطناعي (S) لقوة التجاذب المطبقة عليه من طرف الأرض تعبيرها :

$$\vec{F} = -G.\frac{m_T.m}{r_0^2}.\vec{u}_{TS}$$

في معلم فريني : $\vec{F} = G.\frac{m_T.m}{r_0^2}.\vec{n}$ حيث : $\vec{n} = -\vec{u}_{TS}$ و m كتلة القمر الإصطناعي .

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على القمر الإصطناعي في المعلم المركزي الأرضي نكتب :

$$\vec{F} = m.\vec{a}$$

$$m.\vec{a} = G.\frac{m_T.m}{r_0^2}.\vec{n} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{a} = \frac{G.m_T}{r_0^2}.\vec{n}}$$

3-إثبات انتظام حركة القمر و تعبير سرعته

حسب السؤال 2- متجهة التسارع منظمية إذن : $a_T = 0$ أي: $\frac{dV}{dt} = 0$

يعني أن $\boldsymbol{V = cte}$ أي أن حركة القمر الإصطناعي منتظمة في المعلم المركزي الأرضي.

باعتبار التسارع منظميا ، فإن : $a = a_N$ مع : $a_N = \frac{V^2}{r_0}$

$$\frac{G.m_T}{r_0^2} = \frac{V^2}{r_0} \Rightarrow \boldsymbol{V = \sqrt{\frac{G.m_T}{r_0}}}$$

4-تعريف وتعبير الدور المداري T للقمر الإصطناعي

تعريفه: يساوي المدة التي يستغرقها القمر الإصطناعي لإنجاز دورة واحدة حول الأرض .

تعبيره : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ مع ω السرعة الزاوية

نعلم أن : $V = r_0.\omega$ أي: $\omega = \frac{V}{r_0}$

تعبير T يصبح : $T = \frac{2\pi r_0}{V}$ أي: $\boldsymbol{T = 2\pi r_0.\sqrt{\frac{r_0}{G.m_T}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{G.m_T}}}$

5- تعبير الثابتة $\boldsymbol{K}$ بدلالة $\boldsymbol{G}$ و $\boldsymbol{m_T}$

من خلال العلاقة السابقة :

$$T^2 = 4\pi^2\frac{r_0^3}{G.m_T} \Rightarrow \frac{T^2}{{r_0}^3} = \frac{4\pi^2}{G.m_T}$$

تعبير الثابتة K هو : $\boldsymbol{K = \frac{4\pi^2}{G.m_T}}$

6- تعبير النسبة $\frac{m_S}{m_T}$ بدلالة r_T و r_0 و T_T و T_0

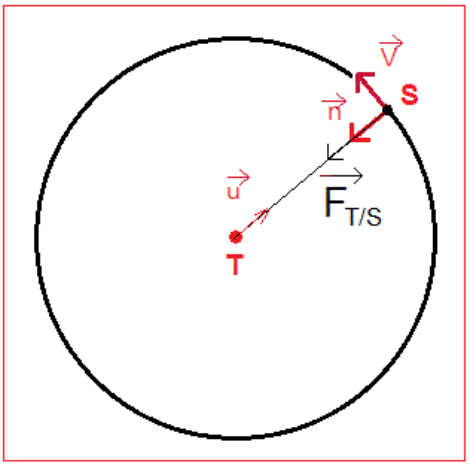
تعبير القانون الثالث لكبلير بالنسبة لحركة الأرض حول الشمس : $\frac{{T_T}^2}{{r_T}^3} = \frac{4\pi^2}{G.m_S}$ ومنه : $m_S = \frac{4\pi^2{r_T}^3}{G.{T_T}^2}$

حسب السؤال5- قانون كبلير الثالث بالنسبة لحركة القمر حول الأرض : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.m_S}$ ومنه : $m_T = \frac{4\pi^2r^3}{G.T^2}$

$$\frac{m_S}{m_T} = \frac{\frac{4\pi^2{r_T}^3}{G.{T_T}^2}}{\frac{4\pi^2r^3}{G.T^2}} \Rightarrow \frac{m_S}{m_T} = \frac{{r_T}^3}{r^3}.\frac{T^2}{{T_T}^2} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{m_S}{m_T} = \left(\frac{r_T}{r}\right)^2.\left(\frac{T}{T_T}\right)^2}$$

ت.ع : $\boldsymbol{\frac{m_S}{m_T} = \left(\frac{1{,}496.10^8\ km}{4{,}22.110^4\ km}\right)^2.\left(\frac{1}{356{,}25}\right)^2 \approx 3{,}34.10^5}$

تمرين 3 :



الجزء الأول :

1- أ- أنظر التبيانة جانبه

ب- تعبير متجهة قوة التجاذب

حسب قانون نيوتن للتجاذب الكوني :

$$\vec{F}_{T/G} = -G.\frac{M_T.m}{(R_T+h)^2}.\vec{u}$$

2- أ- المرجع التي تدرس فيه حركة G

المرجع المركزي الأرضي.

ب- الإفتراض

لتطبيق القانون الثاني لنيوتن يجب أن يكون المرجع المركزي الأرضي غاليليا .

ج- تسارع G

تطبيق القانون الثاني لنيوتن على G نكتب : $\vec{F}_{T/G} = m.\vec{a}$

$m.\vec{a} = -G.\frac{M_T.m}{(R_T+h)^2}.\vec{u}$ نستنتج متجهة التسارع : $\vec{a} = -G.\frac{M_T}{(R_T+h)^2}.\vec{u}$

3- أ-مميزات تسارع حركة دائرية منتظمة

في حركة دائرية منتظمة متجهة التسارع تكون انجذابية مركزية وقيمتها : $a = a_N = \frac{V^2}{R}$

ب- تعبير سرعة G

باعتبار التسارع منظميا نكتب :

$$a = a_N$$

$$\frac{V^2}{R_T+h} = \frac{G.M_T}{(R_T+h)^2}$$

$$V = \sqrt{\frac{G.M_T}{R_T+h}}$$

4- أ-الدور المداري :

تعريفه : يساوي المدة التي يستغرقها القمر الإصطناعي لإنجاز دورة واحدة حول الأرض.

تعبيره : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ مع : $V = (R_T+h).\omega$ من العلاقتين نستنتج : $T = \frac{2\pi(R_T+h)}{V}$

باعتبار تعبير السرعة نحصل على :

$$T = 2\pi(R_T + h).\sqrt{\frac{R_T + h}{G.M_T}}$$

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G.M_T}}}$$

الجزء الثاني :

1- أ- إتمام ملأ الجدول

القمر الإصطناعي	شعاع المسار $R(km)$	الدور المداري $T(s)$	$R^3(km^3)$	$T^2(s^2)$
GPS	$20{,}2.10^3$	$2{,}88.10^4$	$8{,}24.10^{12}$	$8{,}29.10^8$
$GLONASS$	$25{,}5.10^3$	$4{,}02.10^4$	$1{,}66.10^{13}$	$1{,}62.10^9$
$GOVE\ A$	$30{,}0.10^3$	$5{,}16.10^4$	$2{,}69.10^{13}$	$2{,}67.10^9$
$METEOSAT$	$42{,}1.10^3$	$8{,}58.10^4$	$7{,}46.10^{13}$	$7{,}36.10^9$

$$\boldsymbol{R = R_T + h = 6{,}38.10^3 + 23{,}6.10^3 = 30.10^3\ km}$$

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G.M_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{(30\times10^3\times10^3)^3}{6{,}67.10^{-11}\times5{,}92.10^{24}}} = 5{,}16.10^4\ s}$$

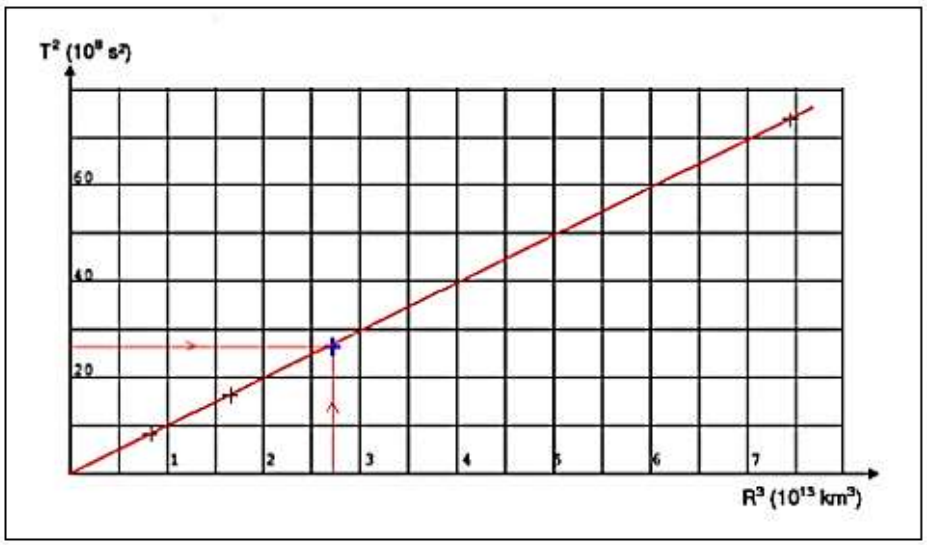
ب- المبيان $\boldsymbol{T^2 = f(R^3)}$

2- أ- استنتاج

المنحنى $\boldsymbol{T^2 = f(R^3)}$ عبارة عن دالة خطية إذن $\boldsymbol{T^2}$ تتناسب مع $\boldsymbol{R^3}$.

ب-تطابق بين الالنتائج التجريبية والنظرية

تجريبيا لدينا $K = \frac{T^2}{R^3}$ ويمثل المعامل الموجه للمنحنى



$$\boldsymbol{K = \frac{70.10^8}{7.10^{13}} = 1.10^{-12}\ s^2.m^{-3}}$$

نظريا : حسب نتيجة السؤال – 4 لدينا

العلاقة : $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G.M_T}}$ أي: $T^2 =$

$4\pi^2.\frac{R^3}{G.M_T}$

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_T} \quad (1)$$

تعبير K هو : $K = \frac{4\pi^2}{G.M_T}$

ت.ع : $K = \frac{4\pi^2}{6{,}67.10^{-11} \times 5{,}92.10^{24}} = 9{,}89.10^{-14}\ s^2.m^3$

القيمتان التجريبية والنظرية للثابتة K تقريبا متساويتان .

نستنتج ان هناك تطابقا بين العلاقة (1) و المنحنى $T^2 = f(R^3)$

ج- اسم القانون

القانون الثالث لكبلير : $\frac{T^2}{R^3} = K$