أكاديمية الجهة الشرقية

تمارين محلولة:الاحتمالات

المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة والأرض والعلوم الزراعية

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1:نذكر أن لقطعة نقدية وجهين : P و F

نرمي قطعة نقدية مرة واحدة

1)حدد كون الامكانيات لهذه التجربة ؟

2)حدد رئيسي المجموعة Ω

أجوبة :

1) يمكن الحصول على : P أو F

P هي امكانية و F هي امكانية أخرى

اذن لهذه التجربة إمكانيتين فقط اذن مجموعة الامكانيات هي :

$\Omega=\{P;F\}$

اذن: $card\left(\Omega\right)=2$ (إمكانيتين فقط)تقرأ رئيسي المجموعة Ω

تمرين2:نرمي قطعة نقدية مرتين متتاليتين

1)حدد كون الامكانيات لهذه التجربة ؟

2)حدد رئيسي المجموعة Ω

أجوبة :

1)يمكن الحصول على : PP أو FF أو FP أو PF اذن: PP هي **امكانية** و FF هي امكانية أخرى

2) اذن لهذه التجربة 4 امكانيات فقط اذن مجموعة الامكانيات هي :

$\Omega=\{PP;FF;PF;FP\}$

ولدينا : $card\left(\Omega\right)=4$ (4 امكانيات فقط)

يمكن لنا استعمال شجرة الإمكانيات للبحث عن كل الامكانيات

الرمية الأولى	الرمية الثانية
2	2

$card\left(\Omega\right)=2\times2=4$ **مبدأ الجذاء**

تمرين3 : نرمي قطعة نقدية ثلاث مرات متتالية

1)أرسم شجرة الامكانيات

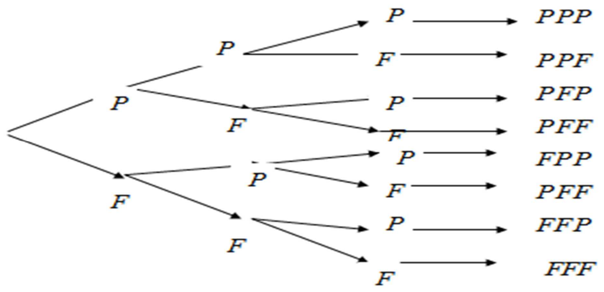
2)حدد كون الامكانيات Ω وحدد $card\left(\Omega\right)$

الأجوبة :

1)يمكن الحصول على : PPP أو FFF أو ......

PPP هي **امكانية** و FFF هي امكانية أخرى و ....

شجرة الإمكانيات



2) اذن لهذه التجربة 8 امكانيات فقط اذن فضاء الامكانيات هو :

$\Omega=\{PPP;PPF;PFP;PFF;FPP;FPF;FFP;FFF\}$

$card\left(\Omega\right)=8$ (8 امكانيات فقط)

الرمية الأولى	الرمية الثانية	الرمية الثالثة
2	2	2

تمرين4 : نعتبر الأرقام التالية : 1 و 3 و 5
حدد عدد الأعداد المكونة من رقمين الذي يمكن تكوينه باستعمال الأرقام السابقة فقط

الجواب : رقم الوحدات يمكن اختياره ب ثلاث كيفيات مختلفة كذلك رقمالعشرات

رقم الوحدات	رقم العشرات
3	3

وحسب المبدأ ألأساسي للتعداد فان عدد الأعداد المكونة من رقمين الذي يمكن تكوينه
هو: $card\left(\Omega\right)=3\times3=9$

تمرين5 : نعتبر الأرقام التالية : 1 و 2 و 6
حدد عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين الذي يمكن تكوينه باستعمال الأرقام السابقة فقط

الجواب : طريقة 1:رقم الوحدات يمكن اختياره ب ثلاث كيفيات مختلفة
لكن رقم العشرات فقط بكيفيتين مختلفتين

رقم الوحدات	رقم العشرات
3	2

طريقة 2:كل امكانية هي ترتيبة من عنصرين مختارين من بين 3 عناصر
ومنه عدد الامكانيات هو عدد الترتيبات :
اذن : $A_3^2=3\times\left(3-1\right)=3\times2=6$

تمرين6 : أحسب : A_4^2 و A_5^3 و A_7^4 و $\frac{A_6^3\times A_{10}^4}{A_{10}^5}$

الجواب: $A_5^3=5\times4\times3=60$ $A_4^2=4\times3=12$

$A_7^4=7\times6\times5\times4=840$

$$\frac{A_6^3\times A_{10}^4}{A_{10}^5}=\frac{6\times5\times4\times10\times9\times8\times7}{10\times9\times8\times7\times6}=\frac{5\times4}{1}=20$$

تمرين7 : لتشغيل الهاتف المحمول يجب الضغط على الأزرار الأربعة التي تحمل الأرقام المكونة للقن السري حسب ترتيبها وإلا سيغلق تلقائيا

1. ما عدد الأقنان السرية الممكنة إذا علمت أن الأرقام المكونة لها لا يمكننا تكرارها
2. ما عدد الأقنان السرية الممكنة إذا علمت أن الأرقام المكونة لها لا يمكننا تكرارها وتتكون فقط من الأرقام التالية فقط : 1 و 2 ,و 3 و 4

الجواب:(1 كل امكانية هي ترتيبة من أربع أرقام مختارة من بين 10 أرقام عدد الامكانيات هو عدد الترتيبات :

ومنه $A_{10}^4=10\times9\times8\times7=5040$

(2

كل امكانية هي ترتيبة من أربع أرقام مختارة من بين 4 أرقام عدد الامكانيات هو عدد الترتيبات :

ومنه: $A_4^4=4\times3\times2\times1=24$

تمرين8 : نعتبر الأرقام التالية : 4 و 5 و 6

حدد عدد الأعداد المكونة من ثلاث أرقام مختلفة الذي يمكن تكوينه باستعمال الأرقام السابقة فقط

الجواب : طريقة 1:

رقم الوحدات يمكن اختياره ب ثلاث كيفيات مختلفة

لكن رقم العشرات فقط بكيفيتين مختلفتين و رقم المئات بكيفية وحيدة

رقم الوحدات	رقم العشرات	رقم المئات
3	2	1

وحسب المبدأ ألأساسي للتعداد فان عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين الذي يمكن تكوينه

هو: $card(\Omega)=3\times2\times1=6$

كل امكانية : تسمى تبديلة لثلاث أعداد

أمثلة : العدد : 456 عدد يمكن تكوينه ويسمى تبديلة

العدد : 564 عدد يمكن تكوينه ويسمى تبديلة

العدد : 546 عدد يمكن تكوينه ويسمى تبديلة

كم عدد التبديلات ؟ هناك 6 تبديلات ممكنة

كل امكانية هي تبديلة من ثلاث أعداد

ومنه عدد الامكانيات هو عدد التبديلات :

عدد التبديلات هو : $3!=3\times2\times1=6$ ويقرأ عاملي 3

تمرين9 : أحسب : $4!$ و $5!$ و $7!$ و $\frac{10!\times5!}{6!\times8!}$

الجواب:

$4!=4\times3\times2\times1=24$ و $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

$7!=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040$

$$\frac{10!\times5!}{6!\times8!}=\frac{10\times9\times8!\times5!}{6\times5!\times8!}=\frac{10\times9}{6}=\frac{10\times3\times3}{3\times2}=\frac{10\times3}{2}=15$$

تمرين10 : ما عدد الكلمات من ستة حروف لها معنى أو لا , و التي يمكن كتابتهما باستعمال جميع حروف الكلمة " المغرب"

الجواب: كل امكانية هي تبديلة من ست أحرف

ومنه عدد الامكانيات هو عدد التبديلات :

$6!=6\times5\times4\times3\times2=720$

تمرين11 : ما عدد الكلمات من أربع حروف لها معنى أو لا و التي يمكن تكوينها باستعمال الحروف التالية فقط S و I و D و A

الجواب: كل امكانية هي تبديلة من أربعة أحرف

ومنه عدد الامكانيات هو عدد التبديلات : $4!=4\times3\times2\times1=24$

تمرين12 : نعتبر المجموعة التالية : $E=\{a;b;c;d\}$

حدد عدد أجزاء المجموعة E التي تحتوي على ثلاث عناصر

الجواب : لدينا: $card(E)=4$

طريقة 1:

الجزء : $A_1=\{a;b;c\}$ يمكن تكوينه ويسمى تأليفة

العدد : $A_2=\{a;b;d\}$ عدد يمكن تكوينه ويسمى تأليفة

الجزء : $A_3=\{b;c;d\}$ يمكن تكوينه ويسمى تأليفة

العدد : $A_4=\{a;c;d\}$ عدد يمكن تكوينه ويسمى تأليفة

اذن عدد التأليفات هو 4

طريقة 2: عدد أجزاء المجموعة E وكل جزء من E هو تأليفة ومنه عدد الأجزاء هو عدد التأليفات لثلاث عناصر مختارة من بين 4 اي :

$C_4^3=4$

تمرين13 : أحسب : C_4^2 و C_5^2 و C_7^4 و C_{12}^3

و C_7^3 و C_5^3 و C_{12}^1 و C_7^7 و C_5^0 و C_5^4

الجواب :

$$C_4^2=\frac{4!}{2!(4-2)!}=\frac{4!}{2!2!}=\frac{4\times3\times2!}{2!2!}=\frac{4\times3}{2!}=6$$

$$C_5^2=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\times4\times3!}{2!3!}=\frac{5\times4}{2!}=10$$

$$C_7^4=\frac{7!}{4!(7-4)!}=\frac{7!}{4!3!}=\frac{7\times6\times5\times4!}{4!3!}=\frac{7\times6\times5}{3!}=35$$

$$C_{12}^3=\frac{12!}{3!(12-3)!}=\frac{12!}{9!3!}=\frac{12\times11\times10\times9!}{9!3!}=\frac{12\times11\times10}{3!}=220$$

$C_{12}^1=12$ و $C_5^3=C_5^2=10$ و $C_7^3=C_7^4=35$

$C_5^4=5$ و $C_5^0=1$ و $C_7^7=1$

تمرين14 : لاجتياز امتحان شفوي على كل مترشح أن يجيب على سؤالين مسحوبين عشوائيا من بين خمس أسئلة مقترحة

حدد عدد الإمكانيات

الجواب : عدد الإمكانيات هوعدد التأليفات من سؤالين مختارة من بين 5 اي : $C_5^2=10$

تمرين15: $E=\left\{2,5,6,7,1,0,\frac{3}{4}\right\}$ $A=\{6,7,1,0\}$

$B=\left\{\frac{3}{4},2,7,6,1\right\}$ $C=\left\{\frac{3}{4},5\right\}$ $D=\{2\}$

1. تحقق أن A و B و C و D أجزاء من E.
2. حدد: $\overline{A},A\cup B,A\cap B$
3. حدد عدد أجزاء E التي تحتوي على ثلاث عناصر
4. حدد عدد أجزاء E التي تحتوي على خمسة عناصر

الأجوبة :(1 A و B و C و D كلها أجزاء من E.

2) $A\cap B$ هو العناصر التي تنتمي الى المجموعتين A و B في نفس الوقت اذن : $A\cap B=\{7;1;6\}$

$A\cup B$ هو العناصر التي تنتمي الى المجموعة A أو تنتمي الى B

$A\cup B=\left\{0;1;2;6;7;\frac{3}{4}\right\}$

و $\overline{A}$ هي العناصر التي تنتمي الى E ولا تنتمي الى المجموعة A

ومنه $\overline{A}=\left\{2;5;\frac{3}{4}\right\}$

3) عدد أجزاء E التي تحتوي على ثلاث عناصر هو :

$$C_7^3=\frac{7!}{3!(7-3)!}=\frac{7!}{3!4!}=\frac{7\times6\times5\times4!}{3!4!}=\frac{7\times6\times5}{3!}=35$$

4) عدد أجزاء E التي تحتوي على خمسة عناصر هو :

$$C_7^5=\frac{7!}{5!(7-5)!}=\frac{7!}{5!2!}=\frac{7\times6\times5!}{5!2!}=\frac{7\times6}{2!}=21$$

تمرين16: أحسب : C_6^2 و C_8^3 و C_{12}^4 و C_{11}^3 و C_8^5 و C_6^4 و C_{10}^1 و C_8^8 و C_{12}^0 و C_{11}^8

الأجوبة :

$$C_6^2=\frac{6!}{2!(6-2)!}=\frac{6!}{2!4!}=\frac{6\times5\times4!}{2!4!}=\frac{6\times5}{2!}=15$$

$$C_8^3=\frac{8!}{3!(8-3)!}=\frac{8!}{3!5!}=\frac{8\times7\times6\times5!}{3!5!}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=8\times7=56$$

$$C_{12}^4=\frac{12!}{4!(12-4)!}=\frac{12!}{8!4!}=\frac{12\times11\times10\times9\times8!}{8!4!}=\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}=990$$

$$C_{11}^3=\frac{11!}{3!(11-3)!}=\frac{11!}{8!3!}=\frac{11\times10\times9\times8!}{8!3!}=\frac{11\times2\times5\times3\times3}{3\times2\times1}=165$$

$$C_8^5=\frac{8!}{5!(8-5)!}=\frac{8!}{5!3!}=\frac{8\times7\times6\times5!}{5!3!}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

نلاحظ أن : $C_8^3=C_8^5$ **حسب الخاصية :** $C_n^p=C_n^{n-p}$

نلاحظ كذلك أن : $C_6^4=C_6^2=15$

$C_{10}^1=10$ **حسب الخاصية :** $C_n^1=n$

$C_8^8=1$ **حسب الخاصية :** $C_n^n=1$

$C_{12}^0=1$ **حسب الخاصية :** $C_n^0=1$

نلاحظ أن : $C_{11}^8=C_{11}^3=165$ **حسب الخاصية :** $C_n^p=C_n^{n-p}$

تمرين17: أحسب : A_8^5 و A_7^3 و $\frac{12!\times7!}{10!\times8!}$ و $\frac{12!}{10!}$

و $\frac{A_8^2\times A_{10}^4}{A_8^5}$ و $\frac{8!\times3}{7!}$ ، $\frac{9!\times7!}{5!\times8!}$ و $\frac{10^9}{5^8}$ و $\frac{A_9^4}{A_9^2}$ و $\frac{9!\times5!}{8!\times3!}$

الأجوبة : $A_7^3=7\times6\times5=210$ $\quad A_8^5=8\times7\times6\times5\times4=6720$

$$\frac{A_6^3\times A_{10}^4}{A_{10}^5}=\frac{6\times5\times4\times10\times9\times8\times7}{10\times9\times8\times7\times6}=\frac{5\times4}{1}=20$$

$$\frac{12!\times7!}{10!\times8!}=\frac{12\times11\times10!\times7!}{10!\times8\times7!}=\frac{12\times11}{8}=\frac{4\times3\times11}{4\times2}=\frac{33}{2}$$

$$\frac{A_8^2\times A_{10}^4}{A_8^5}=\frac{8\times7\times10\times9\times8\times7}{8\times7\times6\times5\times4}=\frac{5\times2\times3\times3\times4\times2\times7}{6\times5\times4}=\frac{3\times2\times7}{1}=42$$

$$\frac{8!\times3}{7!}=\frac{8\times7!\times3}{7!}=\frac{8\times3}{1}=24 \text{ و } \frac{12!}{10!}=\frac{12\times11\times10!}{10!}=\frac{12\times11}{1}=132$$

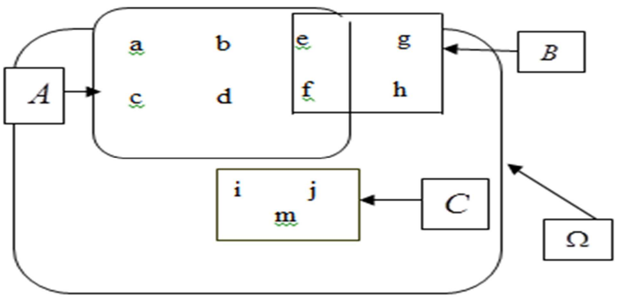
$$\frac{9!\times7!}{5!\times8!}=\frac{9\times8!\times7!}{5!\times8!}=\frac{9\times7!}{5!}=\frac{9\times7\times6\times5!}{5!}=9\times7\times6=378$$

$$\frac{10^9}{5^8}=\frac{10\times10^8}{5^8}=10\times\left(\frac{10}{5}\right)^8=10\times(2)^8=2560$$

$$\frac{A_9^4}{A_9^2}=\frac{9\times8\times7\times6}{9\times8}=7\times6=42$$

$$\frac{9!\times5!}{8!\times3!}=\frac{9\times8!\times5!}{8!\times3!}=\frac{9\times5!}{3!}=\frac{9\times5\times4\times3!}{3!}=9\times5\times4=180$$

تمرين18: الخطاطة جانبه تبين توزيع تلاميذ أحد الأقسام حسب الممارسة الرياضية :



الفئة A يمارسون كرة القدم

الفئة B يمارسون كرة اليد

الفئة C يمارسون كرة السلة

نختار عشوائيا احد التلاميذ من هذا القسم

1) أكتب A و B و C و Ω و $\overline{A}$ و $\overline{C}$ و $A\cap B$ و $A\cup B$ و $A\cap C$ و $A\cup C$ بالتفصيل

2) أحسب : $P(A)$ و $P(B)$ و $P(C)$ و $P(A\cap B)$ و $P(A\cup B)$ و $P(A\cap C)$ و $P(A\cup C)$ و $P(\overline{A})$ و $P(\overline{C})$

3) قارن: $1-p(A)$ و $p(\overline{A})$ و قارن $1-p(C)$ و $p(\overline{C})$

4) تحقق أن : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

5) تحقق أن : $P(A\cup C)=P(A)+P(C)$

الجواب:1) $A=\{a;b;c;d;e;f\}$ $B=\{e;f;g;h\}$

$C=\{i;j;m\}$ $\Omega=\{a;b;c;d;e;f;g;h;i;j;m\}$

$\overline{A}=\{g;h;i;j;m\}$ $\overline{C}=\{a;b;c;d;e;f;g;h\}$

$A\cap B=\{e;f\}$ $A\cup B=\{a;b;c;d;e;f;g;h\}$

$A\cap C=\varnothing$ $A\cup C=\{a;b;c;d;e;f;i;j;m\}$

2) $p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}=\frac{6}{11}$ و $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{4}{11}$

$p(C)=\frac{CardC}{Card\Omega}=\frac{3}{11}$ و $p(A\cap B)=\frac{Card(A\cap B)}{Card\Omega}=\frac{2}{11}$

$p(A\cup B)=\frac{Card(A\cup B)}{Card\Omega}=\frac{8}{11}$ و $p(A\cap C)=\frac{Card(A\cap C)}{Card\Omega}=\frac{0}{11}=0$

$p(A\cup C)=\frac{Card(A\cup C)}{Card\Omega}=\frac{9}{11}$ و $p(\overline{A})=\frac{Card\overline{A}}{Card\Omega}=\frac{5}{11}$

$p(\overline{C})=\frac{Card\overline{C}}{Card\Omega}=\frac{8}{11}$

3) $p(\overline{A})=\frac{5}{11}=1-\frac{6}{11}=1-p(A)$ و $p(\overline{C})=$

$1-p(C)=1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$

4) $P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{6}{11}+\frac{4}{11}-\frac{2}{11}=\frac{8}{11}=P(A\cup B)$

5) $P(A)+P(C)=\frac{6}{11}+\frac{3}{11}=\frac{9}{11}=P(A\cup C)$

<u>تمرين19:</u> A و B حدثان مرتبطان بنفس التجربة العشوائية بحيث:

$p(A)=0,7$ و $p(B)=0,4$ و $p(A\cap B)=0,3$.

أحسب: $p(\overline{A})$ و $p(\overline{B})$ و $p(A\cup B)$

<u>الجواب:</u> $p(\overline{A})=1-p(A)=1-0.7=0.3$

$p(\overline{B})=1-p(B)=1-0.4=0.6$

$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

$=0.7+0.4-0.3=0.8$

<u>تمرين20:</u> يحتوي صندوق غير كاشف على 5 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و كرتين حمراوين

نسحب عشوائيا من الصندوق كرة واحدة

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :
3. " سحب كرة بيضاء "B و " سحب كرة سوداء " N
 " سحب كرة حمراء "R و " عدم سحب كرة سوداء "D

<u>الجواب:</u>1) $card(\Omega)=10$ وهو ببساطة عدد الكرات في الصندوق

2) $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ $p(N)=\frac{CardN}{Card\Omega}=\frac{3}{10}$ و

$p(R)=\frac{CardR}{Card\Omega}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

D هو الحدث المضاد للحدث N أي $D=\overline{N}$ **ومنه**

$p(D)=p(\overline{N})=1-p(N)=1-0.3=0.7$

<u>تمرين21 :</u> يحتوي صندوق غير كاشف على أقراص مرقمة :

قرصان منهم يحملان الرقم 1 و ثلاث أقراص منهم يحملون الرقم 2 و سبعة أقراص تحمل الرقم 4

نسحب عشوائيا من الصندوق *<u>قرصا واحدا</u>*

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب قرص يحمل الرقم 1 "A

" سحب قرص يحمل الرقم 3 " B

" سحب قرص يحمل رقم زوجي "C

" سحب رقم أصغر من أو يساوي 2 "D " سحب قرص لا يحمل الرقم 1 "E

<u>الجواب:1</u>) $card(\Omega)=12$ وهو ببساطة عدد الكرات في الصندوق

$p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{0}{12}=0$ (2 $p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

$p(C)=\frac{CardC}{Card\Omega}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$ $p(D)=\frac{CardD}{Card\Omega}=\frac{5}{12}$

E هو الحدث المضاد للحدث A أي $E=\overline{A}$ **ومنه**

$p(E)=p(\overline{A})=1-p(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

<u>تمرين22:</u>يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 5 كرات حمراء

نسحب عشوائيا كرتين من الصندوق *<u>في آن واحد</u>*

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرتين بيضاوين "B " سحب كرتين حمراوين "R

" سحب كرتين من نفس اللون "M

" سحب كرتين من لون مختلف "D

<u>الأجوبة:</u>1) $28=\frac{8\times7}{2!}=\frac{8\times7\times6!}{2!6!}=\frac{8!}{2!6!}=\frac{8!}{2!(8-2)!}=$

$card(\Omega)=C_8^2$

(2 $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}==\frac{C_3^2}{28}=\frac{3}{28}$ $p(R)=\frac{CardR}{Card\Omega}==\frac{C_5^2}{28}=\frac{10}{28}$

$C_5^2=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\times4\times3!}{2!3!}=\frac{5\times4}{2!}=10$

سحب كرتين من نفس اللون أي سحب كرتين بيضاوين أو كرتين حمراوين $p(M)=\frac{CardM}{Card\Omega}==\frac{C_3^2+C_5^2}{28}=\frac{3+10}{28}=\frac{13}{28}$

D هو الحدث المضاد للحدث M أي $D=\overline{M}$ **ومنه**

$p(D)=p(\overline{M})=1-p(M)=1-\frac{13}{28}=\frac{15}{28}$

<u>تمرين23 :</u> يحتوي صندوق غير كاشف على 4 كرات بيضاء و 5 كرات حمراء و 3 كرات سوداء

نسحب عشوائيا ثلاث كرات من الصندوق *<u>في آن واحد</u>*

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب ثلاث كرات بيضاء "B " سحب ثلاث كرات سوداء " N

" سحب ثلاث كرات حمراء "R "

سحب ثلاث كرات من لون مختلف "D"

"سحب ثلاث كرات من نفس اللون "M"

"سحب كرتين بيضاوين فقط "E"

الجواب: 1) $card\left(\Omega\right)=C_{12}^{3}$ ومنه

$$C_{12}^{3}=\frac{12!}{3!(12-3)!}=\frac{12!}{3!9!}=\frac{12\times11\times10\times9!}{3!9!}=\frac{12\times11\times10}{3!}=\frac{6\times2\times11\times10}{6}=220$$

2) $p\left(B\right)=\frac{CardB}{Card\Omega}==\frac{C_{4}^{3}}{28}=\frac{4}{28}=\frac{2}{14}=\frac{1}{7}$

$p\left(R\right)=\frac{CardR}{Card\Omega}==\frac{C_{5}^{3}}{28}=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$ و $p\left(N\right)=\frac{CardN}{Card\Omega}==\frac{C_{3}^{3}}{28}=\frac{1}{28}$

$$C_{5}^{3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\times4\times3!}{2!3!}=\frac{5\times4}{2!}=10$$

سحب 3 كرات من لون مختلف يعني سحب كرة واحدة حمراء وواحدة سوداء كرة واحدة بيضاء

$$p\left(D\right)=\frac{CardD}{Card\Omega}==\frac{C_{3}^{1}\times C_{4}^{1}\times C_{5}^{1}}{28}=\frac{3\times4\times5}{220}=\frac{15}{55}=\frac{3}{11}$$

M هو الحدث المضاد للحدث D أي $M=\overline{D}$ **ومنه**

$$p\left(M\right)=p\left(\overline{D}\right)=1-p\left(D\right)=1-\frac{3}{11}=\frac{8}{28}=\frac{2}{7}$$

$$p\left(E\right)=\frac{CardE}{Card\Omega}==\frac{C_{4}^{2}\times C_{8}^{1}}{220}=\frac{6\times8}{220}=\frac{12}{55}$$

تمرين24 : يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء و 3 كرات سوداء

نسحب عشوائيا ثلاث كرات من الصندوق *في آن واحد*

1. حدد $card\left(\Omega\right)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب ثلاث كرات بيضاء " B " سحب ثلاث كرات حمراء "R

" سحب ثلاث كرات من لون مختلف "D "سحب ثلاث كرات من نفس اللون "M

" سحب كرة واحدة سوداء فقط "E " سحب كرتين حمراوين فقط "F

" سحب كرة بيضاء على الأقل "G

الأجوبة1) $card\left(\Omega\right)=C_{10}^{3}$

$$C_{10}^{3}=\frac{10!}{3!(10-3)!}=\frac{10!}{3!7!}=\frac{10\times9\times8\times7!}{3!7!}=\frac{10\times9\times8}{6}=\frac{5\times2\times3\times3\times8}{6}=120$$

2) $p\left(B\right)=\frac{CardB}{Card\Omega}==\frac{C_{3}^{3}}{120}=\frac{1}{120}$ لأننا نعلم ن : $C_{n}^{n}=1$

$p\left(R\right)=\frac{CardR}{Card\Omega}==\frac{C_{4}^{3}}{120}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$ لأننا نعلم ن : $C_{n}^{n-1}=n$

سحب 3 كرات من لون مختلف يعني سحب كرة واحدة حمراء ورة واحدة سوداء واحدة بيضاء

$$p\left(D\right)=\frac{CardD}{Card\Omega}==\frac{C_{3}^{1}\times C_{4}^{1}\times C_{3}^{1}}{120}=\frac{3\times4\times4}{120}=\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$$

M هو الحدث المضاد للحدث D أي $M=\overline{D}$ **ومنه**

$$p\left(M\right)=p\left(\overline{D}\right)=1-p\left(D\right)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

سحب كرة واحدة سوداء فقط يعني كرة واحدة سوداء وكرتين غير سوداوين يعني مسحوبة من بين الألوان الأخرى

$$p(E)=\frac{CardE}{Card\Omega}==\frac{C_{3}^{1}\times C_{7}^{2}}{120}=\frac{3\times C_{7}^{2}}{120}$$

نحسب C_{7}^{2} $\quad C_{7}^{2}=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{7!}{2!5!}=\frac{7\times6\times5!}{2!5!}=\frac{7\times6}{2!}=21$

ومنه $p\left(E\right)=\frac{3\times21}{120}=\frac{63}{120}=\frac{21}{40}$

سحب كرتين حمراوين فقط يعني سحب كرتين حمراوين وكرة ثالثة من بين الألوان الأخرى

$p\left(F\right)=\frac{CardF}{Card\,\Omega}==\frac{C_{6}^{1}\times C_{4}^{2}}{120}=\frac{6\times C_{4}^{2}}{120}=\frac{6\times6}{120}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$ **لأن :**

$$C_{4}^{2}=\frac{4!}{2!(4-2)!}=\frac{4!}{2!2!}=\frac{4\times3\times2!}{2!2!}=\frac{4\times3}{2!}=6$$

الحدث المضاد للحدث " سحب كرة بيضاء على الأقل "G

هو : " عدم سحب أي كرة بيضاء " $\overline{G}$ يعني سحب كرة من بين الألوان المتبقية

نحسب احتمال الحدث $\overline{G}$ اذن : $p\left(\overline{G}\right)=\frac{C_{7}^{3}}{120}$ ونحسب C_{7}^{3}

$$C_{7}^{3}=\frac{7!}{3!(7-3)!}=\frac{7!}{3!4!}=\frac{7\times6\times5\times4!}{3!4!}=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$$

ومنه : $p\left(\overline{G}\right)=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}$ ونعلم :

$p\left(G\right)+p\left(\overline{G}\right)=1$ يعني : $p\left(G\right)=1-p\left(\overline{G}\right)=1-\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$

تمرين25:

يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء

نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق :

1. حدد $card\left(\Omega\right)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرتين بيضاوين "B " سحب كرتين سوداوين " N

" سحب كرتين من نفس اللون "M " سحب كرتين من لون مختلف "D

" سحب كرة واحدة بيضاء "E

الجواب:1) $card(\Omega)=A_7^2=7\times6=42$

2) $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}==\frac{A_3^2}{42}=\frac{3\times2}{7\times6}=\frac{1}{7}$

$p(N)=\frac{CardN}{Card\Omega}==\frac{A_4^2}{42}=\frac{4\times3}{7\times6}=\frac{2\times2\times3}{7\times6}=\frac{2}{7}$

$p(M)=\frac{CardM}{Card\Omega}=\frac{A_4^2+A_3^2}{42}=\frac{4\times3+3\times2}{7\times6}=\frac{18}{7\times6}=\frac{3\times6}{7\times6}=\frac{3}{7}$

D هو الحدث المضاد للحدث M أي $D=\overline{M}$ **ومنه**

$p(D)=p(\overline{M})=1-p(M)=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$

حساب احتمال الحدث E : هناك حالتين

السحبة الأولى	السحبة الثانية
B	$\overline{B}$

السحبة الأولى	السحبة الثانية
$\overline{B}$	B

$p(E)=\frac{2A_3^1\times A_4^1}{42}=\frac{2\times3\times4}{7\times6}=\frac{4}{7}$

تمرين26: يحتوي صندوق غير كاشف على 4 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب ثلاث كرات بيضاء "B

" سحب ثلاث كرات سوداء" N

" سحب ثلاث كرات من نفس اللون "M

" سحب ثلاث كرات من لون مختلف "D

" سحب كرتين بيضاوين فقط "E

الجواب:1) $card(\Omega)=A_9^3=9\times8\times7=504$

2) $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}==\frac{A_4^3}{504}=\frac{4\times3\times2}{9\times8\times7}=\frac{4\times3\times2}{3\times3\times8\times7}=\frac{1}{3\times7}=\frac{1}{21}$

$p(N)=\frac{CardN}{Card\Omega}=\frac{A_5^3}{504}=\frac{5\times4\times3}{9\times8\times7}=\frac{5\times4\times3}{3\times3\times4\times2\times7}=\frac{5}{3\times2\times7}=\frac{5}{42}$

$p(M)=\frac{CardM}{Card\Omega}=\frac{A_4^3+A_5^3}{504}=\frac{4\times3\times2+5\times4\times3}{504}=\frac{24+60}{504}=\frac{84}{504}=\frac{1}{6}$

D هو الحدث المضاد للحدث M أي $D=\overline{M}$ **ومنه**

$p(D)=p(\overline{M})=1-p(M)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

حساب احتمال الحدث E : هناك 3 حالات

السحبة الأولى	السحبة الثانية	السحبة الثانية
B	B	$\overline{B}$

أو

السحبة الأولى	السحبة الثانية	السحبة الثانية
$\overline{B}$	B	B

أو

السحبة الأولى	السحبة الثانية	السحبة الثانية
B	$\overline{B}$	B

$p(E)=\frac{3A_4^2\times A_5^1}{9\times8\times7}=\frac{3\times4\times3\times5}{9\times8\times7}=\frac{5}{14}$

تمرين27 : يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبإحلال كرتين من الصندوق :

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرتين بيضاوين "B

" سحب كرتين سوداوين " N

" سحب كرتين من نفس اللون "M

" سحب كرتين من لون مختلف "D

" سحب كرة واحدة بيضاء "E

الجواب:1) $card(\Omega)==7\times7=7^2=49$

2) $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}==\frac{3\times3}{49}=\frac{9}{49}$ $\quad p(N)=\frac{CardN}{Card\Omega}==\frac{4\times4}{7\times7}=\frac{16}{49}$

$p(M)=\frac{CardM}{Card\Omega}=\frac{3\times3+4\times4}{7\times7}=\frac{25}{49}$

D هو الحدث المضاد للحدث M أي $D=\overline{M}$ **ومنه**

$p(D)=p(\overline{M})=1-p(M)=1-\frac{25}{49}=\frac{24}{49}$

السحبة الأولى	السحبة الثانية
$\overline{B}$	B

السحبة الأولى	السحبة الثانية
B	$\overline{B}$

حساب احتمال الحدث E : هناك حالتين

$p(E)=\frac{3\times4+3\times4}{42}=\frac{2\times3\times4}{7\times7}=\frac{24}{49}$

تمرين28: يحتوي صندوق على خمس كرات بيضاء بحيث :كرتين تحملان الرقم 1 و ثلاث كرات تحمل الرقم2 وكذلك يحتوي على7 كرات سوداء بحيث 4 كرات تحمل الرقم2 و ثلاث كرات تحمل الرقم1 لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس.

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق.

نعتبرالأحداث التالية :"الكرة المسحوبة بيضاء": B

"الكرة المسحوبة سوداء": N

"الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1": U

"الكرة المسحوبة تحمل الرقم 2": D

1)أحسب احتمال الأحداث التالية: B و N و U و D و $B\cap U$ و $N\cap D$

2)أ)اذ اكانت أو **علما أن** الكرة المسحوبة بيضاء فما هو الاحتمال لكي تكون حاملة للرقم 1

ب) قارن : $P_B(U)$ و $\frac{P(B\cap U)}{P(B)}$

3)أ)اذ اكانت أو **علما أن** الكرة المسحوبة سوداء فما هو الاحتمال لكي تكون حاملة للرقم 2

ب) قارن : $P_N(D)$ و $\frac{P(D\cap N)}{P(N)}$

4)علما أن الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1 فما هو الاحتمال سحب كرة بيضاء

أجوبة :1) $card(\Omega)=12$ و $P(D)=\frac{7}{12}$ و $P(U)=\frac{7}{12}$

و $P(B)=\frac{5}{12}$ و $P(U)=\frac{5}{12}$

$P(N\cap D)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ و $P(B\cap U)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

2) أ) $P_B(U)=\frac{2}{5}$ 2) ب) $\frac{P(B\cap U)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{12}}{\frac{5}{12}}=\frac{2}{5}=P_B(U)$

3) أ) $P_N(D)=\frac{4}{7}$ 2) ب) $\frac{P(D\cap N)}{P(N)}=\frac{\frac{4}{12}}{\frac{7}{12}}=\frac{4}{7}=P_N(D)$

اذن نلاحظ أن : $\frac{P(D\cap N)}{P(N)}=P_N(D)$ أي

$$P(N\cap D)=P(N)P_N(D)$$

$P_N(D)$: يقرأ كذلك احتمال الحدث D علما أن الحدث N محقق

أو يقرأ احتمال سحب كرة تحمل الرقم 2 علما أنها سوداء

4) علما أن الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1 و الاحتمال سحب كرة بيضاء هو :

$$P_U(B)=\frac{P(U\cap B)}{P(U)}=\frac{\frac{2}{12}}{\frac{5}{12}}=\frac{2}{5}$$

تمرين29 :نرمي نردا أوجهه الستة مرقمة من 1 إلى 6 مرة واحدة ونعتبر الحدثين التاليين :

" ظهور رقم زوجي "A و " ظهور رقم مضاعف للعدد 3 "B

1)حدد احتمال الأحداث التالية : A و B و $A\cap B$ و $P_B(A)$

2)قارن : $p(A\cap B)$ و $p(A)\times p(B)$

أجوبة: $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

" ظهور رقم زوجي و مضاعف للعدد 3 " $A\cap B$

$p(A\cap B)=\frac{1}{6}$ و $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{1}{3}$

2)نلاحظ أن : $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$

نقول إن الحدثين A و B مستقلان

تمرين30 :نعتبر صندوقين A و B بحيث يحتوي الصندوق A على 7 كرات: 3 بيضاء و 4 سوداء يحتوي الصندوق B على 10 كرات: 4 بيضاء و 6 سوداء.

لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس.

نقوم بالتجربة التالية: نسحب كرة من الصندوق A و كرة من الصدوق B.

أحسب احتمال الحدث E : "الحصول على كرة بيضاء من A و على كرة سوداء من B "

الجواب:

نلاحظ أن هذه التجربة مكونة من اختبارين: أحدهما هو سحب كرة الصندوق A , و الآخر هو سحب كرة من الصندوق B و أن الاحتمالات المرتبطة بأحد الاختبارين لا تتعلق بنتائج الاختبار الآخر, نقول في هذه الحالة إن هذه التجربة مكونة من اختبارين مستقلين.

باعتبار الحدثين: E_1 " سحب كرة بيضاء من A" و E_2 " سحب كرة سوداء من B" يكون احتمال الحدث E هو جذاء احتمال الحدثين E_1 و E_2 يعني: $p(E)=p(E_1)\times p(E_2)$.

و بما أن: $p(E_1)=\frac{3}{7}$ و أن: $p(E_2)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ فان:

$$p(E)=\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{35}$$

تمرين31 : يحتوي صندوق على:

ثلاثة كرات تحمل الرقم 1 و كرة واحدة تحمل الرقم 0 و الكرات المتبقية تحمل الرقم 2.

نسحب عشوائيا كرتين تانيا.

و ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجداء الأرقام الموجودة على الكرتين المسحوبتين.

إذا افترضنا أن هناك تساوي الاحتمال لكل السحبات:

1)حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X .

2)حدد قانون احتمال X .

3)حدد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل X

الأجوبة :1) تحديد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X .

يمكننا مثلا سحب كرتين تحملان الرقم 1 اذن الجداء هو **1**

يمكننا مثلا سحب كرتين تحملان الرقم 2 اذن الجداء هو **4**

من بين الكرات المسحوبة كرة تحمل الرقم 0 ومنه الجداء هو **0**

يمكننا مثلا سحب كرة تحمل الرقم 1 وكرة تحمل الرقم 2 اذن الجداء هو **2**

ليس هناك امكانيات أخرى

اذن جميع القيم هي : 0 و 1 و 2 و 4

نكتب : $X(\Omega)=\{0;1,2,4\}$

2) تحديد قانون احتمال X .

- الحدث:" من بين الكرات المسحوبة كرة تحمل الرقم 0 " بالرمز: $(X=0)$

$(X=0)$ يعني " جداء الأرقام الموجودة على الكرتين المسحوبتين يساوى الصفر"

نحسب احتمال الحدث : $(X=0)$

$$P(X=0)=\frac{C_1^1\times C_7^1}{C_8^2}=\frac{1\times 7}{28}=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$$

الحدث:" سحب كرتين تحملان الرقم 1 " بالرمز: $(X=1)$

$$P(X=1)=\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}$$

الحدث:" سحب كرة تحمل الرقم 1 و كرة تحمل الرقم 2 " بالرمز: $(X=2)$

$$P(X=2)=\frac{C_3^1\times C_4^1}{C_8^2}=\frac{3\times 4}{28}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$$

الحدث:" سحب كرتين تحملان الرقم 2 " بالرمز: $(X=4)$

$$P(X=2)=\frac{C_4^2}{C_8^2}=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$$

اذن : هذه النتائج نلخصها فيجدول يسمى : **قانون احتمال** X .

$X(\Omega)$	0	1	2	4
$P(X=x_i)$	7/28=1/4	3/28	12/28=3/7	6/28=3/14

نلاحظ أن :

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=4)=1$$

3)حساب الأمل الرياضي : نرمز له ب : $E(X)$

$$E(X)=0\times p(X=0)+1\times p(X=1)+2\times p(X=2)+4\times p(X=4)$$

$$E(X)=\left(0\times\frac{7}{28}\right)+\left(1\times\frac{3}{28}\right)+\left(2\times\frac{12}{28}\right)+\left(4\times\frac{6}{28}\right)=\frac{3+24+24}{28}=\frac{51}{28}$$

حساب المغايرة : نرمز له ب : $V(X)$

المغايرة هي: $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

$$=\left(0^2\times\frac{7}{28}\right)+\left(1^2\times\frac{3}{28}\right)+\left(2^2\times\frac{12}{28}\right)+\left(4^2\times\frac{6}{28}\right)-\left(\frac{51}{28}\right)^2$$

$$=\frac{3}{28}+\frac{48}{28}+\frac{96}{28}-\left(\frac{51}{28}\right)^2=\frac{147}{28}-\left(\frac{51}{28}\right)^2=\frac{4116}{28^2}-\frac{2601}{28^2}$$

$$V(X)=\frac{1515}{784}$$

حساب الانحراف الطرازي: $\sigma(X)$

الانحراف الطرازي هو $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{1515}{784}}$$

تمرين32 : ليكن X متغيرا عشوائيا قانون احتماله معرف في الجدول التالي:

x_i	-1	0	2	4
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{1}{6}$

1)أحسب احتمال الحدث $(X=2)$ أي قيمة a

2)أحسب $E(X)$ و $\sigma(X)$.

الأجوبة :1) **تحديد** $P(X=2)$

نعلم أن :

$$P(X=-1)+P(X=0)+P(X=2)+P(X=4)=1$$

يعني أن : $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+a+\frac{1}{6}=1$ **يعني أن :** $\frac{3}{4}+a=1$

يعني أن : $a=1-\frac{3}{4}$ **يعني أن :** $a=\frac{1}{4}$

(2

$$E(X)=\left(-1\times\frac{1}{3}\right)+0\left(1\times\frac{1}{4}\right)+\left(2\times\frac{1}{4}\right)+\left(4\times\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$$

حساب الانحراف الطرازي: $\sigma(X)$

الانحراف الطرازي هو $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

المغايرة هي: $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

$$V(X)=\left((-1)^2\times\frac{1}{3}\right)+\left(0^2\times\frac{1}{4}\right)+\left(2^2\times\frac{1}{4}\right)+\left(4^2\times\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$V(X)==\frac{1}{3}+1+\frac{8}{3}-\frac{25}{36}=4-\frac{25}{36}=\frac{144-25}{36}=\frac{119}{36}$$

ومنه: $\sigma(X)=\sqrt{\frac{119}{36}}$

تمرين33 : يحتوي صندوق على 6 كرات تحمل الأرقام: 0, 1, 1 , 2 ,2 ,2 لا يمكن التمييز بينها باللمس.
نسحب عشوائيا و تأنيا كرتين من الصندوق. ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية.
ليكن Y المتغير العشوائي التي يربط كل نتيجة **بمجموع** رقمي الكرتين المسحوبتين

1)حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي Y.

2)حدد قانون احتمال Y.

3)حدد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل Y

أجوبة :

1)إذا كانت الكرتان المسحوبتان تحملان الرقمين 0 و 1 على التوالي فان: $x=1+0=1$
و إذا كانتا تحملان الرقمين 1 و 2 على التوالي فان $x=1+2=3$.
القيم الممكنة تسمى القيم التي يأخذها المتغير العشوائي Y و هي تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $Y(\Omega)$

اذن لدينا: $Y(\Omega)=\{1;2;3;4\}$

2)لنحدد قانون احتمال المتغير العشوائي Y.

لدينا: $Y(\Omega)=\{1;2;3;4\}$

- $(X=1)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 0, و على كرة تحمل الرقم 1
  إذن $p(Y=1)=\frac{C_1^1\times C_2^1}{C_6^2}=\frac{2}{15}$.
- $(Y=2)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 2 , و على كرة تحمل الرقم 0. أو الحصول على كرتين تحملان الرقم 1.
  إذن: $p(Y=2)=\frac{C_1^1\times C_3^1+C_2^2}{C_6^2}$
- $(Y=3)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 1, و على كرة تحمل الرقم 2. إذن $p(Y=3)=\frac{C_1^1\times C_3^1}{C_6^2}=\frac{6}{15}=\frac{3}{5}$
- $(Y=4)$ يعني الحصول على كرتين تحملان الرقم 2, إذن: $p(Y=4)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

نلخص قانون احتمال المتغير العشوائي Y في الجدول التالي:

x_i	1	2	3	4
$p(Y=x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$

3)تحديد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل Y

▪ الأمل الرياضي هو:

$$E(Y)=\left(1\times\frac{2}{15}\right)+\left(2\times\frac{4}{15}\right)+\left(3\times\frac{6}{15}\right)+\left(4\times\frac{3}{15}\right)=\frac{40}{15}=\frac{8}{3}$$

▪ المغايرة هي:

$$V(X)=E(Y^2)-(E(Y))^2=$$

$$=\left(1^2\times\frac{2}{15}\right)+\left(2^2\times\frac{4}{15}\right)+\left(3^2\times\frac{6}{15}\right)+\left(4^2\times\frac{3}{15}\right)-\left(\frac{8}{3}\right)^2=8-\frac{64}{9}=\frac{8}{9}$$

▪ الانحراف الطرازي هو: $\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

تمرين34:

يحتوي صندوق على 6 كرات تحمل الأرقام: **0,-1,-1,-1,1,2**

لا يمكن التمييز بينها باللمس.

نسحب عشوائيا و تأنيا كرتين من الصندوق. ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية.

ليكن Z المتغير العشوائي التي يربط كل نتيجة **بمجموع** رقمي الكرتين المسحوبتين

1)حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي Z.

2)حدد قانون احتمال Z.

3)حدد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل Z

أجوبة :

1) $(-1)+(-1)=(-2)$

$(-1)+(0)=(-1)$

$(-1)+(1)=(0)$

$(2)+(-1)=(1)$ أو $(1)+(0)=(1)$

$(2)+(0)=(2)$

$(2)+(1)=(3)$

القيم الممكنة تسمى القيم التي يأخذها المتغير العشوائي Z هي: $Z(\Omega)=\{-2;-1;0;1;2;3\}$

2)لنحدد قانون احتمال المتغير العشوائي Z.

لدينا: $Z(\Omega)=\{-2;-1;0;1;2;3\}$

▪ $(Z=-2)$يعني الحصول على كرتين تحملان -1

إذن $p(Z=-2)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}$.

▪ $(Z=-1)$يعني" الحصول على كرة تحمل الرقم -1 و على كرة تحمل الرقم 0. "

إذن: $p(Z=-1)=\frac{C_3^1\times C_1^1}{C_6^2}=\frac{3}{15}$

▪ $(Z=0)$يعني" الحصول على كرة تحمل الرقم -1 و على كرة تحمل الرقم 1. "

إذن. $p(Z=0)=\frac{C_1^1\times C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{15}$

▪ $(Z=1)$يعني الحصول على كرة تحمل الرقم -1 و على كرة تحمل الرقم 2.

أو الحصول على كرة تحمل الرقم 0 و على كرة تحمل الرقم 1

إذن: $p(Z=1)=\frac{C_1^1\times C_3^1+C_1^1\times C_1^1}{C_6^2}=\frac{4}{15}$

▪ $(Z=2)$يعني" الحصول على كرة تحمل الرقم 2 و على كرة تحمل الرقم 0. "

إذن: $p(Z=2)=\frac{C_1^1\times C_1^1}{C_6^2}=\frac{1}{15}$

▪ $(Z=3)$يعني" الحصول على كرة تحمل الرقم 2 و على كرة تحمل الرقم 1. "

إذن. $p(Z=3)=\frac{C_1^1\times C_1^1}{C_6^2}=\frac{1}{15}$

نلخص قانون احتمال المتغير العشوائي Z في الجدول التالي:

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$Z=x_i)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

3)تحديد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل Z

▪ الأمل الرياضي هو:

$$E(Z)=\left(-2\times\frac{3}{15}\right)+\left(-1\times\frac{3}{15}\right)+\left(0\times\frac{3}{15}\right)+\left(1\times\frac{4}{15}\right)+\left(2\times\frac{1}{15}\right)+\left(3\times\frac{1}{15}\right)$$

$$E(Z)=\left(-\frac{6}{15}\right)+\left(-\frac{3}{15}\right)+\left(\frac{4}{15}\right)+\left(\frac{2}{15}\right)+\left(\frac{3}{15}\right)=0$$

▪ المغايرة هي: $V(Z)=E(Z^2)-(E(Z))^2$

$$V(Z)=\left((-2)^2\times\frac{3}{15}\right)+\left((-1)^2\times\frac{3}{15}\right)+\left((0)^2\times\frac{3}{15}\right)$$

$$+\left((1)^2\times\frac{4}{15}\right)+\left((2)^2\times\frac{1}{15}\right)+\left((3)^2\times\frac{1}{15}\right)-(0)^2$$

$$V(Z)=\left(\frac{12}{15}\right)+\left(\frac{3}{15}\right)+\left(\frac{4}{15}\right)+\left(\frac{4}{15}\right)+\left(\frac{9}{15}\right)=\frac{32}{15}$$

▪ الانحراف الطرازي هو: $\sigma(Z)=\sqrt{V(Z)}=\sqrt{\frac{32}{15}}$

تمرين35: يحتوي كيس على تسع بيد قات مرقمة من 1 إلى 9, و لا يمكن التمييز بينها باللمس.

نسحب بالتتابع و بدون إحلال 3 بيد قات من الكيس

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل ممكنة لثلاث بيدقات **بعدد** البيدقات التي تحمل رقما فرديا

1)حدد قانون احتمال X.

2)أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ و المغايرة $V(X)$.

أجوبة :

1)

في ثلاث البيدقات المسحوبة يمكننا عدم سحب أي بيدقة تحمل رقما فرديا أي عدد البيدقت الفردية يساوى **0**

أو يمكننا سحب بيدقة واحدة تحمل رقما فرديا أي عدد البيدقت الفردية يساوى **1**

أو يمكننا سحب بيدقتين تحملان رقما فرديا أي عدد البيدقت الفردية يساوى **2**

أو يمكننا سحب ثلاثة تحمل رقما فرديا أي عدد البيدقت الفردية يساوى **3**

اذن القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X هي:

$$X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$$

2)لنحدد قانون احتمال المتغير العشوائي X.

لدينا: $X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$

- $(X=0)$يعني الحصول ثلاث البيدقات تحمل رقما زوجيا

إذن $p(X=0)=\dfrac{A_4^3}{A_9^3}=\dfrac{2}{42}=\dfrac{1}{21}$.

- $(X=1)$يعني" الحصول على بيدقة واحدة تحمل رقما فرديا "

إذن: $p(X=1)=\dfrac{C_3^1\times A_4^2\times A_5^1}{A_9^3}=\dfrac{15}{42}$

- $(X=2)$يعني" الحصول على بيدقتين تحملان رقما فرديا "

إذن. $p(X=2)=\dfrac{C_3^2\times A_4^1\times A_5^2}{A_9^3}=\dfrac{20}{42}=\dfrac{10}{21}$

- $(X=3)$يعني" الحصول على ثلاث بيدقات تحمل رقما فرديا "

إذن. $p(X=3)=\dfrac{A_5^3}{A_9^3}=\dfrac{5}{42}$

نلخص قانون احتمال المتغير العشوائي X في الجدول التالي:

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\dfrac{2}{42}$	$\dfrac{15}{42}$	$\dfrac{20}{42}$	$\dfrac{5}{42}$

3)تحديد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل X

- الأمل الرياضي هو:

$$E(X)=\left(0\times\frac{2}{42}\right)+\left(1\times\frac{15}{42}\right)+\left(2\times\frac{20}{42}\right)+\left(3\times\frac{5}{42}\right)=\frac{5}{3}$$

- المغايرة هي: $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

$$V(X)=\left((0)^2\times\frac{2}{42}\right)+\left((1)^2\times\frac{15}{42}\right)+\left((2)^2\times\frac{20}{42}\right)+\left((3)^2\times\frac{5}{42}\right)-\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$V(X)=\frac{10}{3}-\frac{25}{9}=\frac{5}{9}$$

- الانحراف الطرازي هو: $\sigma(Z)=\sqrt{V(Z)}=\sqrt{\dfrac{5}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

تمرين36 :,

I. <u>نعتبر الاختبار التالي :</u>

نرمي نردا مكعبا أوجهه الستة مرقمة من 1 الى 6

ونعتبر الحدث التالي : " الحصول على عدد قابل للقسمة على 3 " A

أحسب $p(A)=p$ احتمال الحدث A و $p(A)=p$ احتمال الحدث $\overline{A}$

II. <u>نكرر الاختبارالسابق أربع مرات متتالية :</u>

اي نرمي النرد 4 مرات : عدد المرات هو : $n=4$

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي **عدد** المرات التي يتحقق فيها الحدث A (خلال $n=4$ اختبار).

1)حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي

2)حدد قانون احتمال X.

3) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ و المغايرة $V(X)$.

<u>أجوبة :</u>

<u>1)نعتبر الاختبار التالي :</u>

$$p(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \quad \text{و} \quad p(\overline{A})=1-p(A)=\frac{2}{3}$$

<u>2)</u>المتغير العشوائي X هو متغير عشوائي حداني وسيطاه هما $n=4$ و $p=\dfrac{1}{3}$

ولدينا القاعدة التالية :

$$p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k\in\{0;1;2;3;4\}$$

تحيدد قانون احتمال X.

$$p(X=0)=C_4^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4=1\times1\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$

$$p(X=1)=C_4^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=4\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$$

$$p(X=2)=C_4^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=6\times\frac{1}{9}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{81}$$

$$p(X=3)=C_4^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=4\times\frac{1}{27}\times\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$$

$$p(X=4)=C_4^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0=1\times\frac{1}{81}=\frac{1}{81}$$

x_i	0	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\dfrac{16}{81}$	$\dfrac{32}{81}$	$\dfrac{24}{81}$	$\dfrac{8}{81}$	$\dfrac{1}{81}$

(3

حساب الأمل الرياضي $E(X)$ و المغايرة $V(X)$.

بما أن المتغير العشوائي X هو متغير عشوائي حداني وسيطاه هما $n=4$ و $p=\dfrac{1}{3}$

فان : $E(X)=np$ و $V(X)=np(1-p)$

- الأمل الرياضي هو: $E(X)=np=4\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$

▪ المغايرة هي: $V(X)=np(1-p)=4\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$

تمرين37 : نرمي قطعة نقدية غير مزيفة ثلاث مرات متتابعة ونعتبر الحدث التالي : " ظهور الوجه F "A
أحسب احتمال الحدث التالي :
" ظهور الوجه F مرتين بالضبط "B

الجواب : نحن أمام اختبار واحد يتكرر ثلاث مرات متتابعة :
أي أمام متغير عشوائي حداني وسيطاه هما $n=3$ و $p=\frac{1}{2}$

نستعمل القاعدة التالية : $n=3$ حيث $p(A)=\frac{1}{2}$

$$p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k\in\{0;1;2;3\}$$

$$p(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=3\times\left(\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$$

تمرين38 : الاحتمال لكي يصيب رام الهدف هو : $\frac{2}{3}$
قام هذا الرامي ب5 محاولات :
أحسب احتمال الحدث التالي :
" الرامي يصيب الهدف أربع مرات بالضبط "B

الجواب : نحن أمام اختبار واحد يتكرر خمسة مرات متتابعة :
أي أمام متغير عشوائي حداني وسيطاه هما $n=5$ و $p=\frac{2}{3}$

نستعمل القاعدة التالية : $n=5$ حيث $p(A)=\frac{2}{3}$

$$p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k\in\{0;1;2;3;4;5\}$$

$$p(X=4)=C_5^4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^1=5\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^1=5\left(\frac{16}{243}\right)=\frac{80}{243}$$

تمرين39: نرمي قطعة نقدية 3 مرات متتالية
X : " المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة بعدد المرات الذي يظهر فيها الوجه P "
1- حدد $cad\Omega$ ؛ $X(\Omega)$
2- حدد قانون احتمال X
3- احسب : $\sigma(X);V(X);E(X)$

أجوبة :1) $card\Omega=2^3=8$

$$\Omega=\{FFF;FFP;FPF;PFF;FPP;PFP;PPF;PPP\}$$

$$X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$$

2) $(X=0)=\{FFF\}$ **إذن :** $P(X=0)=\frac{1}{8}$

$(X=1)=\{FFP;FPF;PFF\}$

إذن : $P(X=1)=\frac{3}{8}$

نجد : $P(X=2)=\frac{3}{8}$ ؛ $P(X=3)=\frac{1}{8}$

$X(\Omega)$	**0**	**1**	**2**	**3**
$P(X=x_i)$	**1/8**	**3/ 8**	**3/8**	**1/8**

3) $E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

$$V(X)=\frac{1}{8}\times\left(0-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{3}{8}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{3}{8}\times\left(2-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{8}\times\left(3-\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\sigma(X)=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad V(X)=\frac{3}{4}$$

تمرين40 : يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 12 سوداء و 3 حمراء .
نسحب 8 كرات بالتتابع بإحلال
نعتبر الحدث B : " الحصول على 6 كرات بيضاء بالضبط "
1)احسب : $P(B)$
2) نعتبر X : " عدد المرات التي تكون فيها الكرة بيضاء "
احسب : $V(X)$ ؛ $E(X)$

أجوبة : 1)الاختبار هو سحب كرة واحدة .
يعاد الاختبار $n=8$ مرة .
نحن أمام اختبار واحد يتكرر ثمانية مرات متتابعة :
A : " الحصول على كرة بيضاء "

$$P(A)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$$

أي أمام متغير عشوائي حداني وسيطاه هما $n=8$ و $p=\frac{1}{4}$

B : " وقوع A $k=6$ مرة "

$$P(B)=P(X=6)=C_8^6\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(1-\frac{1}{4}\right)^{8-6}$$

$$P(B)=P(X=6)=C_8^6\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

2) X **متغير عشوائي حداني وسيطاه** $n=8$ **و** $p=\frac{1}{4}$

إذن : $E(X)=8\times\frac{1}{4}$ ؛

$$V(X)=8\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$$

تمرين41 : يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و 2 حمراء. نسحب من الصندوق 5 كرات .
X : " المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة بمجموع الكرات البيضاء "
الحدث A : " الحصول على كرة بيضاء على الأقل "
1- حدد : $X(\Omega)$
2- احسب : $cardA$ $p(X=2)$ في كل حالة :
أ- السحب تآنيا
ب - السحب بالتتابع بإحلال
ج - السحب بالتتابع بدون إحلال

الجواب:1) $X(\Omega)=\{0;1;2;3;4;5\}$

2) أ) السحب تآنيا : $\boxed{card\Omega=C_{11}^5}$

نعتبر الحدث $\overline{A}$: " عدم الحصول على أي كرة بيضاء "

لدينا : $card\overline{A} = C_6^5$ إذن: $\boxed{cardA = C_{11}^5 - C_6^5}$

$$\boxed{p(X=2) = \frac{C_5^2 \times C_6^3}{C_{11}^5}}$$

ب) السحب بالتتابع بإحلال : $\boxed{card\Omega = 11^5}$

نعتبر الحدث $\overline{A}$: " عدم الحصول على أي كرة بيضاء "

لدينا : $card\overline{A} = 6^5$ إذن: $\boxed{cardA = 11^5 - 6^5}$

$\boxed{p(X=2) = C_5^2\left(\frac{5}{11}\right)^2\left(\frac{6}{11}\right)^3}$ أو : $\boxed{p(X=2)=C_5^2\frac{5^2 6^3}{11^5}}$

ج) السحب بالتتابع بدون إحلال : $\boxed{card\Omega = A_{11}^5}$

نعتبر الحدث $\overline{A}$: " عدم الحصول على أي كرة بيضاء "

لدينا : $card\overline{A} = A_6^5$ إذن: $\boxed{cardA = A_{11}^5 - A_6^5}$

$$\boxed{p(X=2) = C_5^2 \frac{A_5^2 A_6^3}{A_{11}^5}}$$

<u>تمرين42</u> : يحتوي صندوق على 6 كرات سوداء و 3 حمراء.

نسحب من الصندوق كرتين بالتتابع بدون إحلال .

نعتبر : الحدث A : " الكرة الأولى سوداء "

الحدث B : " الكرة الثانية حمراء "

أ – حدد : $P(A\cap B);P(B);P(A)$

ب- هل A و B مستقلان ؟

ج- احسب : $P_B(A)$, $P(A\cup B)$, $P\left(\overline{A}\cap B\right)$

<u>الأجوبة :</u>

أ) $card\Omega = 9\times 8 = 72$

الحدث A : NX (X سوداء أو حمراء)

$card(A) = 6\times 8 = 48$

$p(A) = \frac{48}{72} = \frac{2}{3}$ أو مباشرة $\boxed{p(A) = \frac{2}{3}}$

الحدث B : NR أو RR

$card(B) = 3\times 2 + 6\times 3 = 24$

$p(B) = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$ **أو مباشرة** $p(B) = \frac{3}{9}\times\frac{2}{8} + \frac{6}{9}\times\frac{3}{8}$

إذن: $\boxed{p(B) = \frac{1}{3}}$

الحدث $A\cap B$ **:" الأولى سوداء و الثانية حمراء "** NR

إذن: $P(A\cap B) = \frac{6\times 3}{9\times 8}$ **و منه :** $\boxed{P(A\cap B) = \frac{1}{4}}$

نعلم أن : $P_A(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)}$ **إذن:** $P_A(B) = \frac{3}{8}$

ب) A **و** B **غير مستقلان**

لأن : $P(A\cap B) \neq P(A)\times P(B)$

أو لأن : $p_A(B) \neq p(B)$

ج) نعلم أن : $P_B(A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$ **إذن:** $\boxed{P_B(A) = \frac{3}{4}}$

نعلم أن : $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

إذن: $\boxed{P(A\cup B) = \frac{3}{4}}$

نعلم أن : $P\left(\overline{A}\cap B\right) = P(B-A)$

و : $P(B-A) = P(B) - P(A\cap B)$

إذن: $P\left(\overline{A}\cap B\right) = P(B) - P(A\cap B)$

و منه : $\boxed{P\left(\overline{A}\cap B\right) = \frac{1}{12}}$