

.01

.01 أدرس اشتقاق الدالة  $f$  في  $x_0 = 1$  ثم في  $x_0 = 0$  مع  $x \neq 1$   $f(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$  ،  $f(1) = 1$

.02

لتعتبر  $f : [-1; 1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  الدالة المعرفة ب:  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

.01 حدد  $g$  التمديد بالاتصال في  $x_0 = 0$  للدالة  $f$ ..02 هل  $g$  قابلة للاشتقاق في  $x_0 = 0$  ؟

.03

لتعتبر  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  الدالة المعرفة ب:  $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$

.01 هل  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]0; 1[$  ؟.02 هل  $f$  قابلة للاشتقاق على يمين  $x_0 = 0$  ؟ أعط تاويل هندسي للنتيجة المحصل عليها ..03 هل  $f$  قابلة للاشتقاق على يسار  $x_0 = 1$  ؟

.04

.01 أحسب  $f'(x)$  الدالة المشتقة للدالة  $f$  لكل حالة من الحالات التالية .

؛  $f(x) = (5x+1)^4$  ؛  $f(x) = x^3 \sqrt{4x+1}$  ؛  $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$  ؛  $f(x) = \frac{x^2 + 16}{x + 4}$  ؛  $f(x) = \frac{3x - 5}{2 - x}$

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$  ؛  $f(x) = \frac{3\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 8}$  ؛  $f(x) = \frac{x + 2}{3 - x} \sqrt{x^2 + 1}$  ؛  $f(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x} + 8}$  ؛  $f(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x} + 7}$  ؛  $f(x) = \sqrt{\frac{3x - 5}{2 - x}}$

$f(x) = \frac{3}{\sin x}$  ؛  $f(x) = \frac{1}{x} + \tan x$  ؛  $f(x) = \sin(4x) + \cos(7x + 1)$  ؛  $f(x) = \sqrt{x} + 7 \cos x$  ؛  $f(x) = x^2 + 3 \sin x$

$f(x) = (x^2 + 2x - 3)^{\frac{2}{5}}$  ؛  $f(x) = \sqrt[6]{x^2 + 2x - 3}$  ؛  $f(x) = \sqrt[5]{x^7}$  ؛  $f(x) = \sqrt[7]{x}$

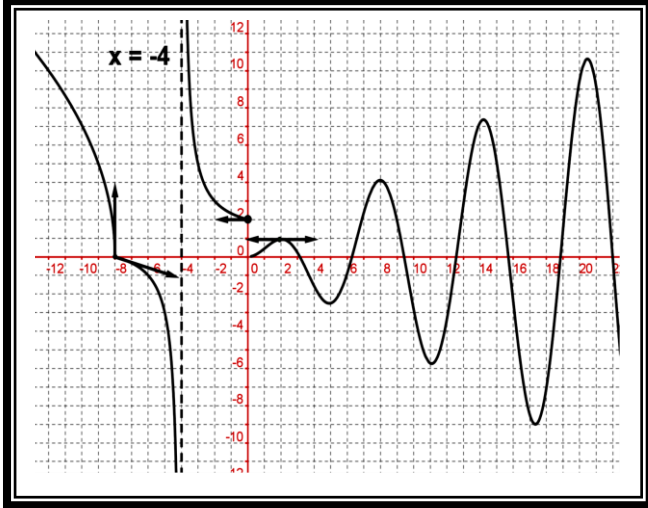
.05

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة كما يلي :  $f(x) = \sqrt[6]{x^2 + 2x - 3} = \sqrt{(x-1)(x+3)}$

.01 حدد مجموعة تعريف الدالة  $f$ ..02 أحسب  $f'$  على  $]-\infty, -3[ \cup ]1, +\infty[$ .

## .06

الشكل الآتي يمثل منحنى دالة  $f$  في المستوى  $(P)$  المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .



استنتج مبيانيا النهايات التالية:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

و ماذا يمكن أن نقول عن نهاية  $f$  عند  $+\infty$ .

- .01** أ- أدرس مبيانيا اتصال الدالة  $f$  على يمين  $0$ .  
 ب- أدرس مبيانيا اتصال الدالة  $f$  على يسار  $0$ .  
 ج- هل  $f$  متصلة في  $0$  ؟  
**.02** أ- هل  $f$  قابلة للاشتقاق في  $-8$  ؟  
 ب- ما هو العدد المشتق على يسار  $0$ .  
 ج- أعط معادلة المماس في  $2$ .

## .07

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 + 4} & ; x \geq 0 \\ f(x) = 3x^2 + 2; & x < 0 \end{cases}$$

**.01** أ- أحسب :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

ب- أدرس اتصال الدالة  $f$  في النقطة  $x_0 = 0$ .

**.02** أ- أدرس اشتقاق الدالة  $f$  على يسار النقطة  $x_0 = 0$  ؛ ثم أعط تأويلا هندسيا لنتيجة المحصل عليها.

ب- أدرس اشتقاق الدالة  $f$  على يمين النقطة  $x_0 = 0$ .

ج- هل الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق في النقطة  $x_0 = 0$ .

**.03** أ- أحسب الدالة المشتقة  $f'$  ل  $f$  على المجال  $]0 + \infty[$  ثم حدد إشارتها على  $]0 + \infty[$ .

ب- أحسب الدالة المشتقة  $f'$  ل  $f$  على المجال  $] -\infty, 0[$  ثم حدد إشارتها على  $] -\infty, 0[$ .

ج- أعط جدول تغيرات  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

**.04** أعط معادلة المماس لمنحنى الدالة  $f$  في النقطة  $x_1 = 2$ .

**.05** أ- ليكن  $g$  قصور الدالة  $f$  على المجال  $I = ] -\infty, 0[$ . بين أن  $g$  تقبل دالة عكسية  $g^{-1}$  من  $J$  إلى  $I$  مع تحديد  $J$ .

ب- حدد  $g^{-1}(x)$  لكل  $x$  من  $J$ .

## .08

في رحلة طويلة لقطار T.G.V و التي تقدر ب  $1000 \text{ km}$  هناك مقطع من مسار الرحلة على شكل قطعة في هذا المقطع القطار يسر بسرعة

ثابتة  $v$  (معبّر عنها ب  $\text{km/h}$ ) حيث تكلفة الوقود بالساعة لهذه السرعة هي معبر عنها بهذه الدالة :  $C(x) = 2048 + v^3$ .

**.01** ما هي سرعة القطار في هذا المقطع لكي تكون تكلفة المحروقات مثالية بالنسبة للشركة ؟

**01.** ندرس اشتقاق الدالة  $f$  في  $x_0 = 1$  ثم في  $x_0 = 0$  مع  $x \neq 1$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x-1}, & x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

• ندرس اشتقاق الدالة  $f$  في  $x_0 = 1$ .

- اشتقاق الدالة  $f$  على يمين  $x_0 = 1$ .

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x-1} - 1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1} - (x-1)}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x\sqrt{(x-1)^2} - (x-1)}{(x-1)^2}; \quad (|x| = x; \quad x \rightarrow 1^+) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x|x-1| - (x-1)}{(x-1)^2}; \quad \left(\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1) - (x-1)}{(x-1)^2}; \quad (|x-1| = x-1; \quad x \rightarrow 1^+) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}[\cancel{x-1}]}{(\cancel{x-1})^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ومنه :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1 \in \mathbb{R}$

**خلاصة (1) :** الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على يمين  $x_0 = 1$  و  $f'_d(1) = 1$

- اشتقاق الدالة  $f$  على يسار  $x_0 = 1$ .

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x-1} - 1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1} - (x-1)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x\sqrt{(x-1)^2} - (x-1)}{(x-1)^2} ; (|x| = x ; x \rightarrow 1^-) \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x|x-1| - (x-1)}{(x-1)^2} ; \left( \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x(x-1) - (x-1)}{(x-1)^2} ; (|x-1| = -(x-1) ; x \rightarrow 1^-) \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(-x-1)}{(x-1)^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x-1}{x-1} ; \left( \lim_{x \rightarrow 1^-} x-1 = 0^- ; \lim_{x \rightarrow 1^-} -x-1 = -2 \right) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

ومنه :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = +\infty \notin \mathbb{R}$

**خلاصة (2) :** الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق على يسار  $x_0 = 1$

**خلاصة :** الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق في  $x_0 = 1$

• ندرس اشتقاق الدالة  $f$  في  $x_0 = 0$ .

- اشتقاق الدالة  $f$  على يمين  $x_0 = 0$ .

لدينا :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x-1} - 0}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x(x-1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x}\sqrt{(x-1)^2}}{\cancel{x}(x-1)} ; (|x| = x ; x \rightarrow 0^+) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x-1|}{x-1} ; \left( \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-(x-1)}{x-1} ; (|x-1| = -(x-1) ; x \rightarrow 0^+) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} -1 \\
&= -1
\end{aligned}$$

ومنه :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = -1 \in \mathbb{R}$

خلاصة (1) : الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على يمين  $x_0 = 0$  و  $f'_d(0) = -1$

- اشتقاق الدالة  $f$  على يسار  $x_0 = 0$ .  
لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| \sqrt{x^2 - 2x + 1} - 0}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| \sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x \sqrt{(x-1)^2}}{x(x-1)} ; (|x| = -x ; x \rightarrow 0^-) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-|x-1|}{x-1} ; \left( \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-(-(x-1))}{x-1} ; (|x-1| = -(x-1) ; x \rightarrow 0^-) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \in \mathbb{R} \text{ ومنه}$$

خلاصة (2) : الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على يسار  $x_0 = 0$  و  $f'_g(0) = 1$

خلاصة : الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق في  $x_0 = 1$  لأن  $f'_g(0) \neq f'_d(0)$

**.02**

لنعتبر  $\mathbb{R} \rightarrow [-1;1] \setminus \{0\}$  : الدالة المعرفة ب:  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

**.01** نحدد  $g$  التمديد بالاتصال في  $x_0 = 0$  للدالة  $f$ .  
لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\
 &= 1 \quad ; \quad \left( \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x} = 1 \right) \\
 &\quad \text{و منه : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

**خلاصة:** الدالة  $f$  تقبل تمديد بالاتصال في النقطة  $x_0 = 0$  هي الدالة  $g$  المعرفة ب:

$$\begin{cases} g(x) = f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \quad ; \quad [-1;1] \setminus \{0\} \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

أو أيضا:

الدالة  $f$  تقبل تمديد بالاتصال في النقطة  $x_0 = 0$  هي الدالة  $h$  المعرفة ب:

$$h(x) = \frac{2}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \quad ; \quad [-1;1]$$

**02.** هل  $g$  قابلة للاشتقاق في  $x_0 = 0$  ؟

طريقة 1:

$$h(x) = \frac{2}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \quad ; \quad [-1;1]$$

نستعمل الصيغة للتمديد بالاتصال الدالة  $[-1;1]$

لدينا:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} - 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x} + 1 - \sqrt{1-x}}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \quad ; \quad (2 = 1+1) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \sqrt{1+x}}{x} + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \right] \times \frac{1}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{(1 - \sqrt{1+x})(1 + \sqrt{1+x})}{x(1 + \sqrt{1+x})} + \frac{(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})}{x(1 + \sqrt{1-x})} \right] \times \frac{1}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1-1-x}{x(1+\sqrt{1+x})} + \frac{1-1+x}{x(1+\sqrt{1-x})} \right] \times \frac{1}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = 0 \in \mathbb{R} \text{ : ومنه}$$

**خلاصة:** الدالة  $h$  قابلة للاشتقاق في  $x_0 = 0$  و العدد المشتق في  $x_0 = 0$  هو  $h'(0) = 0$ .

**طريقة 2:** اقترحها التلميذة مياصو احسان

$$\begin{cases} g(x) = f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} ; [-1;1] \setminus \{0\} \\ g(0) = 1 \end{cases} \text{ : نستعمل الصيغة للتمديد بالاتصال الدالة}$$

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (x + \sqrt{1-x})}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - (x + \sqrt{1-x}))(\sqrt{1+x} + (x + \sqrt{1-x}))}{x^2 (\sqrt{1+x} + (x + \sqrt{1-x}))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-x^2-2x\sqrt{1-x}-1+x}{x^2 (\sqrt{1+x} + (x + \sqrt{1-x}))} ; \left( (x + \sqrt{1-x})^2 = x^2 + 2x\sqrt{1-x} + 1-x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - x^2 - 2x\sqrt{1-x}}{x^2 (\sqrt{1+x} + (x + \sqrt{1-x}))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2-x-2\sqrt{1-x})}{x^2 (\sqrt{1+x} + (x + \sqrt{1-x}))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-x-2\sqrt{1-x})}{x} \times \frac{1}{(\sqrt{1+x} + (x + \sqrt{1-x}))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((2-x)-2\sqrt{1-x})(2-x+2\sqrt{1-x})}{x((2-x)+2\sqrt{1-x})} \times \frac{1}{(\sqrt{1+x} + (x + \sqrt{1-x}))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4x + x^2 - 4(1-x)}{x((2-x) + 2\sqrt{1-x})} \times \frac{1}{(\sqrt{1+x} + (x + \sqrt{1-x}))} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x((2-x) + 2\sqrt{1-x})} \times \frac{1}{(\sqrt{1+x} + (x + \sqrt{1-x}))} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{((2-x) + 2\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + (x + \sqrt{1-x}))} \\
&= 0 \quad ; \quad \left( \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} ((2-x) + 2\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + (x + \sqrt{1-x})) = 4 \times 2 = 8 \right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0 \in \mathbb{R} \quad \text{ومنه :}$$

**خلاصة:** الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق في  $x_0 = 0$  و العدد المشتق في  $x_0 = 0$  هو  $g'(0) = 0$ .

## .03

لنعتبر  $f : [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$  الدالة المعرفة ب:  $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ .

**.01** هل  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]0;1[$  ؟

لدينا الدالة :  $x \mapsto x(1-x)$  قابلة للاشتقاق و موجبة قطعاً على  $]0;1[$  ومنه الدالة  $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$  قابلة للاشتقاق على  $]0;1[$

**.02** ندرس قابلية للاشتقاق  $f$  على يمين  $x_0 = 0$  ؟ أعط تأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها.

ندرس اشتقاق  $f$  على يمين  $x_0 = 0$

لدينا :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x(1-x)} - 0}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x(1-x)} \times \sqrt{x(1-x)}}{x\sqrt{x(1-x)}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x}(1-x)}{\cancel{x}\sqrt{x(1-x)}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1-x)}{\sqrt{x(1-x)}}
\end{aligned}$$

$$= +\infty \quad ; \quad \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} 1-x = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x(1-x)} = 0^+ \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \notin \mathbb{R} \quad \text{ومنه :}$$



**خلاصة:** الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق على يمين  $x_0 = 0$

تأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها منحنى الدالة  $f$  يقبل نصف مماس على يمين  $x_0 = 0$  موازي لمحور الأرتاب .

**03.** هل  $f$  قابلة للاشتقاق على يسار  $x_0 = 1$  ؟

ندرس اشتقاق  $f$  على يسار  $x_0 = 1$

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x(1-x)} - 0}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x(1-x)} \times \sqrt{x(1-x)}}{(x-1)\sqrt{x(1-x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(1-x)}{(x-1)\sqrt{x(1-x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x(1-x)}}\end{aligned}$$

$$= +\infty \quad ; \quad \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x(1-x)} = 0^+ \right)$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \notin \mathbb{R} \text{ ومنه}$$

**خلاصة:** الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق على يسار  $x_0 = 1$

**.04**

**01.** أحسب  $f'(x)$  الدالة المشتقة للدالة  $f$  لكل حالة من الحالات التالية .

لدينا :

$$f'(x) = \left[ \frac{3x-5}{2-x} \right]' = \left[ \frac{3x-5}{-x+2} \right]' = \left| \begin{array}{cc} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{array} \right| \times \frac{1}{(-x+2)^2} = \frac{6-5}{(-x+2)^2} = \frac{1}{(-x+2)^2}$$

$$f'(x) = \left[ \frac{x^2+16}{x+4} \right]' = \frac{(x^2+16)'(x+4) - (x^2+16)(x+4)'}{(x+4)^2} = \frac{2x(x+4) - (x^2+16) \times 1}{(x+4)^2} = \frac{x^2+8x-16}{(x+4)^2}$$

$$\cdot f'(x) = \left[ \sqrt{x^2-5x+6} \right]' = \left[ \frac{x^2-5x+6}{2\sqrt{x^2-5x+6}} \right]' = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}}$$

$$f'(x) = \left[ x^3 \sqrt{4x+1} \right]' = (x^3)' \times \sqrt{4x+1} + x^3 \times \left[ \sqrt{4x+1} \right]' = 3x^2 \sqrt{4x+1} + x^3 \times \frac{(4x+1)'}{2 \times \sqrt{4x+1}}$$

$$= 3x^2 \sqrt{4x+1} + \frac{4x^3}{2 \times \sqrt{4x+1}}$$

$$f'(x) = \left[ (5x+1)^4 \right]' = 4(5x+1)' \times (5x+1)^3 = 4 \times 5 \times (5x+1)^3 = 20(5x+1)^3 \quad \bullet$$

$$f'(x) = \left[ \sqrt{\frac{3x-5}{2-x}} \right]' = \left[ \frac{3x-5}{2-x} \right]' \times \frac{1}{2 \times \sqrt{\frac{3x-5}{2-x}}} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \times \frac{1}{(-x+2)^2} \times \frac{1}{2 \times \sqrt{\frac{3x-5}{2-x}}} \\ = 1 \times \frac{1}{(-x+2)^2} \times \frac{1}{2 \times \sqrt{\frac{3x-5}{2-x}}} = \frac{1}{2(-x+2)^2 \times \sqrt{\frac{3x-5}{2-x}}} \quad \bullet$$

$$f'(x) = \left[ \frac{x+2}{\sqrt{x+7}} \right]' = \frac{(x+2)' \sqrt{x+7} - (x+2)(\sqrt{x+7})'}{\sqrt{x+7}^2} = \frac{1 \times \sqrt{x+7} - (x+2) \frac{(x+7)'}{2 \times \sqrt{x+7}}}{\sqrt{x+7}^2} \\ = \frac{2(x+7) - (x+2)}{2(x+7) \times \sqrt{x+7}} = \frac{x+12}{2(x+7) \times \sqrt{x+7}} \quad \bullet$$

$$f'(x) = \left[ \frac{x+2}{\sqrt{x+8}} \right]' = \frac{(x+2)'(\sqrt{x+8}) - (x+2)(\sqrt{x+8})'}{(\sqrt{x+8})^2} = \frac{1 \times (\sqrt{x+8}) - (x+2) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x+8})^2} \\ = \frac{2x+16\sqrt{x} - x - 2}{2\sqrt{x} \times (\sqrt{x+8})^2} = \frac{x+16\sqrt{x} - 2}{2\sqrt{x} \times (\sqrt{x+8})^2} \quad \bullet$$

$$f'(x) = \left[ \frac{x+2}{3-x} \sqrt{x^2+1} \right]' = \left[ \frac{x+2}{3-x} \right]' \times \sqrt{x^2+1} + \left[ \frac{x+2}{3-x} \right] \times \left[ \sqrt{x^2+1} \right]' \\ = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \times \frac{1}{(-x+2)^2} \times \sqrt{x^2+1} + \frac{x+2}{3-x} \times \left[ \sqrt{x^2+1} \right]' \\ = \frac{1}{(-x+2)^2} \times \sqrt{x^2+1} + \frac{x+2}{3-x} \times \frac{[x^2+1]'}{2 \times \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(-x+2)^2} \times \sqrt{x^2+1} + \frac{x+2}{3-x} \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \bullet$$

$$\left[ \frac{ag(x)+b}{cg(x)+d} \right]' = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \times \frac{1}{(cg(x)+d)^2} \times g'(x) \quad \bullet$$

ملحوظة:

$$f'(x) = \left[ \frac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+8}} \right]' = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} \times \frac{1}{(\sqrt{x+8})^2} \times (\sqrt{x})' = \frac{22}{(\sqrt{x+8})^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{11}{(\sqrt{x+8})^2 \times \sqrt{x}} \quad \bullet$$

$$f'(x) = \left[ \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right]' = (\sqrt{x^2+1})' - (\sqrt{x^2+1})' \times \frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{(x^2+1)'}{2 \times \sqrt{x^2+1}} - \frac{(x^2+1)'}{2 \times \sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^2} \quad \bullet$$

$$= \frac{2x}{2 \times \sqrt{x^2+1}} - \frac{2x}{2 \times \sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{x(x^2+1) - x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^3}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = [x^2 + 3 \sin x]' = 2x + 3 \cos x \quad \bullet$$

$$f'(x) = [\sqrt{x} + 7 \cos x]' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 7 \sin x \quad \bullet$$

$$f'(x) = [\sin(4x) + \cos(7x+1)]' = 4 \cos(4x) - 7 \sin(7x+1) \quad \bullet$$

$$f'(x) = \left[ \frac{1}{x} + \tan x \right]' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{-\cos^2 x + x^2}{x^2 \cos^2 x}; \quad \left( (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \right) \quad \bullet$$

$$f'(x) = \left[ \frac{3}{\sin x} \right]' = -3 \times \frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{-3 \cos x}{\sin^2 x} \quad \bullet$$

$$f'(x) = [\sqrt[7]{x}]' = \left[ x^{\frac{1}{7}} \right]' = \frac{1}{7} \times x^{\frac{1}{7}-1} = \frac{1}{7} \times x^{-\frac{6}{7}} = \frac{1}{7} \times \sqrt[7]{x^{-6}} = \frac{1}{7} \times \frac{1}{\sqrt[7]{x^6}} \quad \bullet$$

$$f'(x) = [\sqrt[5]{x^7}]' = \left[ x^{\frac{7}{5}} \right]' = \frac{7}{5} \times x^{\frac{7}{5}-1} = \frac{7}{5} \times x^{\frac{2}{5}} = \frac{7}{5} \times \sqrt[5]{x^2} \quad \bullet$$

$$f'(x) = [\sqrt[6]{x^2+2x-3}]' = \left[ (x^2+2x-3)^{\frac{1}{6}} \right]' = \frac{1}{6} \times (x^2+2x-3)' \times (x^2+2x-3)^{\frac{1}{6}-1}$$

$$= \frac{1}{6} \times (2x+2) \times (x^2+2x-3)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{3} \times \frac{x+1}{\sqrt[6]{(x^2+2x-3)^5}}$$

$$f'(x) = \left[ (x^2+2x-3)^{\frac{2}{5}} \right]' = \frac{2}{5} \times (x^2+2x-3)' \times (x^2+2x-3)^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5} \times (2x+2) \times (x^2+2x-3)^{-\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{2}{5} \times (2x+2) \times (x^2+2x-3)^{-\frac{3}{5}} = \frac{4x+4}{5 \times \sqrt[5]{(x^2+2x-3)^3}}$$

.05

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة كما يلي :  $f(x) = \sqrt[6]{x^2+2x-3} = \sqrt[6]{(x-1) \times (x+3)}$

**01.** نحدد مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

$$x \in D_f \Leftrightarrow (x-1) \times (x+3) \geq 0$$

لدينا :

$$\Leftrightarrow x \in ]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$$

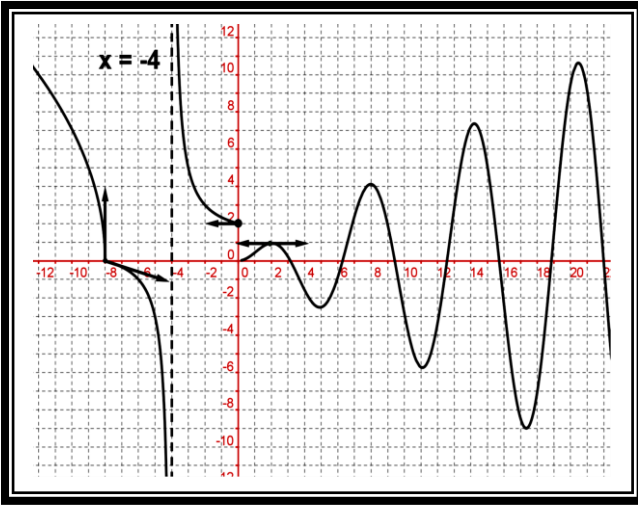
**خلاصة :** مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي :  $D_f = ]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$

**02.** نحسب  $f'$  على  $]1, +\infty[ \cup ]-\infty, -3[$ .

$$f'(x) = \left[ \sqrt[6]{x^2 + 2x - 3} \right]' = \left[ (x^2 + 2x - 3)^{\frac{1}{6}} \right]' = \frac{1}{6} (x^2 + 2x - 3)' \times (x^2 + 2x - 3)^{\frac{1}{6} - 1}$$

$$= \frac{1}{6} (2x + 2) \times (x^2 + 2x - 3)^{-\frac{5}{6}} = \frac{x + 1}{3 \times \sqrt[6]{(x^2 + 2x - 3)^5}}$$

$$f'(x) = \frac{x + 1}{3 \times \sqrt[6]{(x^2 + 2x - 3)^5}} \quad \text{خلاصة:}$$



.06

الشكل الآتي يمثل منحنى دالة  $f$  في المستوى  $(P)$  المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(\vec{0}, \vec{i}, \vec{j})$ .

**01.** استنتج مبيانيا النهايات التالية:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

مبيانيا لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

أما عند  $+\infty$  الدالة  $f$  ليس لها نهاية.

**02. أ-** ندرس مبيانيا اتصال الدالة  $f$  على يمين  $0$  : الدالة  $f$  غير متصلة على يمين  $0$  ( لأن  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  و  $f(0) = 2$  )

**ب-** أدرس مبيانيا اتصال الدالة  $f$  على يسار  $0$  . الدالة  $f$  متصلة على يسار  $0$  ( لأن  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 = f(0)$  و  $f(0) = 2$  )

**ج-** هل  $f$  متصلة في  $0$  ؟  $f$  غير متصلة في  $0$  .

**03. أ-** هل  $f$  قابلة للاشتقاق في  $-8$  ؟  $f$  غير قابلة للاشتقاق في  $-8$  ( هناك نقطة مزوارة )

**ب-** ما هو العدد المشتق على يسار  $0$  . العدد المشتق على يسار  $0$  هو  $f'(0) = 0$  ( لأن نصف المماس على يسار  $0$  موازي لمحور الأفاصيل )

**ج-** أعط معادلة المماس في  $2$  . لدينا : معادلة المماس في  $0$  هي  $y = 1$  ( يمكنك استعمال  $f(0) = 1$  و  $f'(0) = 0$  )

.07

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 + 4} & ; x \geq 0 \\ f(x) = 3x^2 + 2 & ; x < 0 \end{cases}$$

**01.** أ- نحسب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4} = +\infty ; \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 4 = +\infty \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 + 2 = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 = +\infty$$

ب - ندرس اتصال الدالة  $f$  في النقطة  $x_0 = 0$ .  $f(0) = 2$

اتصال الدالة  $f$  على يمين النقطة  $x_0 = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + 4} = 2 = f(0) ; \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 4 = 4 \right)$$

ومنه : الدالة  $f$  متصلة على يمين النقطة  $x_0 = 0$ .

اتصال الدالة  $f$  على يسار النقطة  $x_0 = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x^2 + 2 = 2 = f(0) ; \left( \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x^2 + 2 = 2 \right)$$

ومنه : الدالة  $f$  متصلة على يسار النقطة  $x_0 = 0$ .

**خلاصة :** الدالة  $f$  متصلة على النقطة  $x_0 = 0$ .

**02. أ -** أدرس اشتقاق الدالة  $f$  على يسار النقطة  $x_0 = 0$ ؛ ثم أعط تأويلا هندسيا لنتيجة المحصل عليها.

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 + 2 - 2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \in \mathbb{R} \text{ : ومنه}$$

**خلاصة :** الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على يسار النقطة  $x_0 = 0$  و  $f'_g(0) = 0$

تأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها منحني الدالة  $f$  يقبل نصف مماس على يسار  $x_0 = 0$  موازي لمحور الأفاصيل .

ب - ندرس اشتقاق الدالة  $f$  على يمين النقطة  $x_0 = 0$ .

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - 2)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)}{x(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 4 - 4}{x(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4} + 2}$$

$$= 0 \quad ; \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + 4} + 2; \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \in \mathbb{R} \quad \text{ومنه :}$$

**خلاصة:** الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على يمين النقطة  $x_0 = 0$  و  $f'_d(0) = 0$

ج - هل الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق في النقطة  $x_0 = 0$ .

نعم الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق في النقطة  $x_0 = 0$  لأن  $f$  قابلة للاشتقاق على يمين و يسار  $x_0 = 0$  و  $f'_d(0) = f'_g(0)$

**03.** أ - أحسب الدالة المشتقة  $f'$  ل  $f$  على المحال  $]0 + \infty[$  ثم حدد إشارتها على  $]0 + \infty[$ .

لدينا :  $f'(x) = \left[ \sqrt{x^2 + 4} \right]' = \frac{(x^2 + 4)'}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$  **ومنه :**  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

إشارة :  $f'$  على المحال  $]0 + \infty[$  لدينا :  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} > 0$

ب - أحسب الدالة المشتقة  $f'$  ل  $f$  على المحال  $]-\infty, 0[$  ثم حدد إشارتها على  $]-\infty, 0[$ .

لدينا :  $f'(x) = [3x^2 + 2]' = 6x$  **ومنه :**  $f'(x) = 6x$

إشارة :  $f'$  على المحال  $]-\infty, 0[$  لدينا :  $f'(x) = 6x < 0$

ج - نعطي جدول تغيرات  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

جدول تغيرات  $f$  على  $\mathbb{R}$  هو كالتالي :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		$0$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$2$	$+\infty$

**04.** أعط معادلة المماس لمنحنى الدالة  $f$  في النقطة  $x_1 = 2$ .

ومنه :

معادلة المماس لمنحنى الدالة  $f$  في النقطة  $x_1 = 2$  هي :  $y = (x - x_0)f'(x_0) - f(x_0)$  مع  $f(2) = 2\sqrt{2}$  و

$$f'(2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ومنه :  $y = (x - 2)f'(2) - f(2) = (x - 2)\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$

**خلاصة :** معادلة المماس لمنحنى الدالة  $f$  في النقطة  $x_1 = 2$  هي :  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$

**05. أ-** ليكن  $g$  قصور الدالة  $f$  على المجال  $I = ]-\infty, 0]$ . بين أن:  $g$  تقبل دالة عكسية  $g^{-1}$  من  $J$  إلى  $I$  مع تحديد  $J$ .  
 لدينا: الدالة  $f$  متصلة و تناقصية قطعاً على  $I = ]-\infty, 0]$  إذن  $g$  قصور الدالة  $f$  على المجال  $I = ]-\infty, 0]$  فهي متصلة و تناقصية قطعاً على  $I = ]-\infty, 0]$ .

ومنه:  $g$  تقبل دالة عكسية  $g^{-1}$  من  $J$  إلى  $I$  تحديد  $J$ : لدينا:  $J = g(I) = g(]-\infty, 0]) = [2; +\infty[$  و بالتالي:  $J = [2; +\infty[$

**خلاصة:**  $g$  تقبل دالة عكسية  $g^{-1}$  من  $J = [2; +\infty[$  إلى  $I = ]-\infty, 0]$ .

**ب-** نحدد  $g^{-1}(x)$  لكل  $x$  من  $J$ .

ليكن:  $x \in I = ]-\infty, 0]$  و  $y \in J = [2; +\infty[$  نضع:  $f(x) = y$  و  $f^{-1}(y) = x$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 3x^2 + 2 = y$$

$$\Leftrightarrow x^2 = y - 2 \quad ; \quad (y \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{y - 2} \notin I = ]-\infty, 0] \quad \text{أو} \quad x = -\sqrt{y - 2} \in I = ]-\infty, 0]$$

$$\text{ومنه: } x = -\sqrt{y - 2}$$

$$g^{-1}: J = [2; +\infty[ \rightarrow I = ]-\infty, 0]$$

$$\text{خلاصة: الدالة العكسية } g^{-1} \text{ من } J \text{ إلى } I \text{ مع: } x \mapsto g^{-1}(x) = -\sqrt{x - 2}$$