

سلسلة 1	الدوال الأسية	السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية
<p>تمرين 1:</p> <p>(1) حل في IR المعادلات: $e^{3x} = 2e^{x+1}$ ، $e^{2x} + e^x - 2 = 0$ ، $e^{x^2-3x-3} + 1 = 0$ و $e^{x-4} = 1$ و $e^{4x-3} = e^5$</p> <p>(2) حل في IR المتراجحات: $e^{2x} - 4e^x + 3 > 0$ و $(e^x + 1)(e^x - e) \leq 0$</p>		
<p>تمرين 2: حدد $f'(x)$ في كل حالة مما يلي دون تحديد مجموعة التعريف:</p> <p>$f(x) = \ln(e^x + 1)$ ، $f(x) = e^{x+\ln x}$ ، $f(x) = \ln(x) e^x$ ، $f(x) = e^{-7x} + 2e^x$ ، $f(x) = e^{5x}$</p>		
<p>تمرين 3: احسب النهايات التالية:</p> <p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + x}{e^x + 3}$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x + x}{e^x + 3}$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{x^3}$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x}$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{e^x + 1}$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^x} - 1}{x}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^{3x} - 1}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) \cdot \ln(x)$</p>		
<p>تمرين 4: نعتبر المتتالية المعرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^3 \end{cases}$ و نضع لكل $n \in IN$ $v_n = \ln(u_n)$</p> <p>(1) بين أن v_n هندسية ثم استنتج حساب u_n بدلالة n</p> <p>(2) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$</p>		
<p>تمرين 5: نعتبر الدالة $f = 2x - \frac{e^x}{e^x - 1}$</p> <p>(1) حدد Df و نهايات f عند محددات Df</p> <p>(2) ادرس تغيرات f واعط جدول تغيراتها</p> <p>(3) ادرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f</p> <p>(4) بين أن $A\left(0, \frac{-1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى Cf</p> <p>(5) أنشئ في معلم متعامد ممنظم Cf منحنى الدالة f</p>		
<p>تمرين 6: نعتبر الدالة $f(x) = \ln(e^{2x} + 1) - x$ و ليكن Cf منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم</p> <p>(1) بين أن: $Df = IR$</p> <p>(2) احسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$</p> <p>(3) تحقق أن: $\forall x \in IR$ $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$ ثم استنتج أن f دالة زوجية</p> <p>(4) تحقق أن: $\forall x \in IR$ $f(x) - x = \ln\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)$</p> <p>أ) بين أن $y = x$ (Δ): هو مقارب مائل للدالة f جوار $+\infty$</p> <p>ب) ادرس الوضع النسبي لـ (Δ) و Cf</p> <p>(5) بين أن: $\forall x \in IR$ $f'(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$</p> <p>(6) ادرس تغيرات f واعط جدول تغيراتها</p> <p>(7) أنشئ Cf</p>		

تمرين 1 :

$$S = \{2\} \text{ لدينا } e^{4x-3} = e^5 \Leftrightarrow 4x-3=5 \Leftrightarrow 4x=8 \Leftrightarrow x=2$$

$$S = \{4\} \text{ لدينا } e^{x-4} = 1 \Leftrightarrow e^{x-4} = e^0 \Leftrightarrow x-4=0 \Leftrightarrow x=4$$

$$S = \emptyset \text{ لدينا } e^{x^2-3x-3} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x^2-3x-3} = -1 \text{ وبما أن } \forall t \in \mathbb{R} \ e^t > 0 \text{ بينما } -1 < 0 \text{ فإن } S = \emptyset$$

$$\text{لدينا : } e^{2x} + e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 + e^x - 2 = 0 \text{ نضع : } t = e^x \text{ نجد : } t^2 + t - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9 \text{ منه : } t = \frac{-1+3}{2} = 1 \text{ أو } t = \frac{-1-3}{2} = -2 \text{ منه : } e^x = 1 \text{ أو } e^x = -2 \text{ (غير ممكن)}$$

$$S = \{0\} \text{ بالتالي}$$

$$e^{3x} = 2e^{x+1} \Leftrightarrow \ln(e^{3x}) = \ln(2e^{x+1}) \Leftrightarrow 3x = \ln(2) + \ln(e^{x+1}) \Leftrightarrow 3x = \ln(2) + x + 1$$

$$e^{3x} = 2e^{x+1} \Leftrightarrow 2x = 1 + \ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{1 + \ln(2)}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{1 + \ln(2)}{2} \right\} \text{ بالتالي}$$

نعتمد في حل مثل هذه المعادلات على القواعد $(e^x = e^y \Leftrightarrow x = y)$ و $\forall x \in \mathbb{R} \ e^x > 0$ و $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ (e^x = e^y \Leftrightarrow x = y)$ و $\forall x > 0 \ \forall y > 0 \ (x = y \Leftrightarrow \ln x = \ln y)$ و $\forall x \in \mathbb{R} \ \ln(e^x) = x$

نعلم أن : $\forall x \in \mathbb{R} \ e^x > 0$ إذن $\forall x \in \mathbb{R} \ e^x + 1 > 0$

$$S =]-\infty; 1] \text{ بالتالي } (e^x + 1)(e^x - e) \leq 0 \Leftrightarrow e^x - e \leq 0 \Leftrightarrow e^x \leq e^1 \Leftrightarrow x \leq 1$$

$$\text{أولا لنعمل الحدودية : } t^2 - 4t + 3 \text{ لدينا : } \Delta = 16 - 12 = 4 \text{ منه : } t_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \text{ و } t_2 = \frac{4-2}{2} = 1$$

$$\text{منه : } t^2 - 4t + 3 = (t-3)(t-1)$$

$$\text{منه : } e^{2x} - 4e^x + 3 > 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x + 3 > 0 \Leftrightarrow (e^x - 3)(e^x - 1) > 0$$

لنحدد إشارة كل من $e^x - 3$ و $e^x - 1$

$$\text{لدينا : } e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \text{ و } e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{و } e^x - 3 > 0 \Leftrightarrow e^x > 3 \Leftrightarrow x > \ln(3) \text{ و } e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$$

منه :

x	$-\infty$	0	$\ln(2)$	$+\infty$
$e^x - 1$	-	0	+	+
$e^x - 3$	-	-	0	+
$(e^x - 3)(e^x - 1)$	+	0	-	+

$$S =]-\infty; 0[\cup]\ln(2); +\infty[\text{ بالتالي}$$

كان من الممكن حل هذه المتراجحة بطريقة أسهل، لكننا تعمدنا إدراج هذه الطريقة لأنها هي الأكثر استعمالا عند تحديد إشارة المشتقة.

تمرين 2 :

$$f'(x) = (e^{-7x} + 2e^x)' = -7e^{-7x} + 2e^x$$

$$f'(x) = (e^{5x})' = 5e^{5x}$$

$$f'(x) = (\ln(x) e^x)' = (\ln(x))' e^x + \ln(x) (e^x)' = \frac{1}{x} e^x + \ln(x) e^x = e^x \left(\frac{1}{x} + \ln(x) \right)$$

$$f'(x) = (\ln(e^x + 1))' = \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$f'(x) = (e^{x+\ln x})' = (x + \ln x)' e^{x+\ln x} = \left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{x+\ln x}$$

تمرين 3: احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \quad \left(\frac{0}{-\infty} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 + \frac{2}{e^x} \right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x + x}{e^x + 3} = -\infty \quad \left(\frac{0 - \infty}{3} \rightarrow -\infty \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} + \frac{1}{x^3} = +\infty \quad (+\infty + 0 \rightarrow +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + x}{e^x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(2 + \frac{x}{e^x} \right)}{e^x \left(1 + \frac{3}{e^x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{x}{e^x}}{1 + \frac{3}{e^x}} = \frac{2+0}{1+0} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) \cdot \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) \cdot (x \cdot \ln(x)) = 1 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 + 1 - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} - \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{e^{2x} - 1}{2x} - \frac{e^x - 1}{x} = 2 \times 1 - 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^{3x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{2x} - 1}{x}}{\frac{e^{3x} - 1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{e^{2x} - 1}{2x}}{3 \frac{e^{3x} - 1}{3x}} = \frac{2 \times 1}{3 \times 1} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} + 1)}{x(\sqrt{e^x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x(\sqrt{e^x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{e^x + 1} = 1 \times \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

طريقة 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x}{2}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}} - 1}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

طريقة 2

🌱 للتذكير: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ أو بصفة عامة: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax} = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ أو بصفة عامة: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0^+ \text{ تعني أيضا أن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

🌱 لا تحاول استعمال أي طريقة إلا بعد التعويض المباشر و التحقق من وجود شكل غير محدد، لأنه كما تبين الأمثلة كثيرا ما تكون النتيجة مباشرة و نجدها بسهولة بمجرد التعويض

تمرين 4: $v_n = \ln(u_n)$ ، $u_0 = \frac{1}{2}$ ؛ $u_{n+1} = u_n^3$ ؛ $n \geq 0$

لدينا : $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n^3) = 3 \ln(u_n) = 3v_n$ ، إذن $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية منه : $v_n = v_0 \times q^n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) 3^n$

$$u_n = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right) 3^n} = \left(e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \right)^{3^n} = \left(\frac{1}{2} \right)^{3^n} \text{ منه : } \ln(u_n) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) 3^n$$

1

بما أن : $3 > 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ وبما أن $0 < \frac{1}{2} < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

2

🌱 للتذكير إذا كان $a > 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$ و إذا كان $-1 < a < 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^n = 0$

$$f(x) = 2x - \frac{e^x}{e^x - 1} : \text{تمرين 5}$$

$$Df = \{x \in \mathbb{R} / e^x \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \frac{e^x}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} = +\infty \quad (+\infty - 1 \rightarrow +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - \frac{e^x}{e^x - 1} = -\infty \quad (-\infty - 0 \rightarrow -\infty)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2x - \frac{e^x}{e^x - 1} = -\infty \quad \left(0 - \frac{1}{0^+} \rightarrow -\infty\right)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 2x - \frac{e^x}{e^x - 1} = +\infty \quad \left(0 - \frac{1}{0^-} \rightarrow +\infty\right)$$

1

لدينا :

$$\forall x \in Df \quad f'(x) = 2 - \frac{(e^x)'(e^x - 1) - e^x(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} = 2 - \frac{e^x(e^x - 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} = 2 - \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x}}{(e^x - 1)^2} = 2 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$

منه : $\forall x \in Df \quad f'(x) > 0$ ، منه :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = 2 - 0 = 2 \quad \left(\frac{1}{+\infty} \rightarrow 0\right) \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$(\Delta_1): y = 2x - 1 \text{ يقبل مقاربا مائلا معادلته : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} = \frac{-1}{1 - 0} = -1 \text{ و}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \frac{e^x}{e^x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - \frac{e^x}{x(e^x - 1)} = 2 - 0 = 2 \quad \left(\frac{0}{-\infty} \rightarrow 0\right) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$(\Delta_2): y = 2x \text{ يقبل مقاربا مائلا معادلته : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{-0}{0 - 1} = 0 \text{ و}$$

3

السؤال هنا يتطلب إجراء كل مراحل تحديد الفروع اللانهائية، لكن إن كان السؤال يطلب فقط البرهان على كون مستقيم هو مقارب مائل سنحسب نهاية واحدة فقط في هذه الحالة كما هو الحال في السؤال الرابع من التمرين الموالي، لكننا أثرنا طرح السؤال بهذه الطريقة للتذكير بهذه المراحل فهي جد مهمة

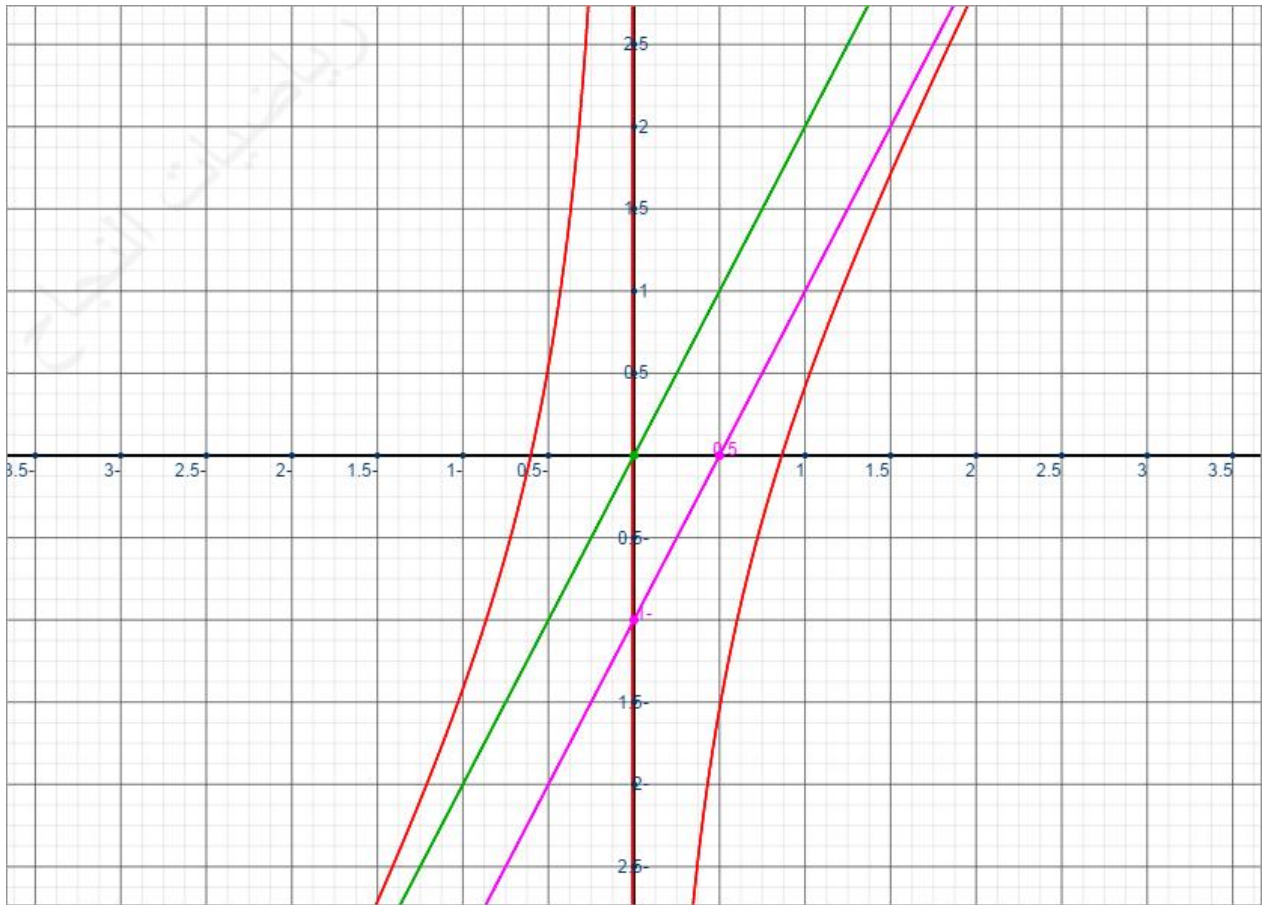
لنبين أن: $f(2 \times 0 - x) = 2 \times \left(\frac{-1}{2}\right) - f(x)$ أي: $f(-x) = -1 - f(x)$

لدينا: $f(-x) + f(x) = -2x - \frac{e^{-x}}{e^{-x} - 1} + 2x - \frac{e^x}{e^x - 1} = -\frac{1}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x - 1}$

$f(-x) + f(x) = \frac{-1}{1 - e^x} - \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{1 - e^x}{e^x - 1} = -1$

إذن النقطة $A\left(0, \frac{-1}{2}\right)$ هي مركز تماثل للمنحنى Cf

للتذكير النقطة $\Omega(a, b)$ مركز تماثل يعني $f(2a - x) = 2b - f(x)$
المستقيم $(\Delta): x = a$ محور تماثل يعني: $f(2a - x) = f(x)$



تمرين 6: $f(x) = \ln(e^{2x} + 1) - x$

1 نعلم أن: $\forall x \in \mathbb{R} e^{2x} > 0$ إذن منه $Df = \mathbb{R}$

2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^{2x} + 1) - x = +\infty$ ($\ln(0+1) = 0$; $0 - (-\infty) \rightarrow +\infty$)

3 لدينا: $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = \ln(e^{2x} + 1) - x = \ln(e^{2x} + 1) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{e^{2x} + 1}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{e^{2x}}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) = \ln(e^x + e^{-x})$

منه: $\forall x \in \mathbb{R} f(-x) = \ln(e^{-x} + e^x) = f(x)$ بالتالي f دالة زوجية

$\forall x \in \mathbb{R} f(x) - x = \ln(e^{2x} + 1) - x - x = \ln(e^{2x} + 1) - 2x = \ln(e^{2x} + 1) - \ln(e^{2x}) = \ln\left(\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x}}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)$

4 لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right) = \ln(1+0) = 0$ إذن المستقيم $y = x$ هو مقارب مائل للالة f جوار $+\infty$

ب
 لدينا : $f(x) - x = \ln\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)$ ، بما أن : $\frac{1}{e^{2x}} > 0$: فإن : $1 + \frac{1}{e^{2x}} > 1$: منه : $\ln\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right) > 0$
 منه $f(x) - x > 0$ ما يعني أن Cf فوق (Δ)

5 لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (\ln(e^{2x} + 1) - x)' = \frac{(e^{2x} + 1)'}{e^{2x} + 1} - 1 = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} - 1 = \frac{2e^{2x} - e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

لدينا $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{2x} + 1 > 0$
 ولدينا : $e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ و $e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 بالتالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$\ln 2$	$+\infty$

