الأستاذ: نجيب عثماني

أكاديمية الجهة الشرقية

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا
شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

تمارين بحلول في درس الدوال اللوغاريتمية

المادة: الرياضيات

تمرين1: إذا علمت أن $l\,n(2)\simeq 0,7$ و $l\,n(3)\simeq 1,1$ فاحسب ما يلي: $l\,n(6)$ $l\,n(4)$ $l\,n(8)$ $l\,n(72)$ $l\,n\left(\frac{1}{2}\right)$ $l\,n\left(\frac{3}{2}\right)$ $l\,n\left(\sqrt{2}\right)$ $l\,n\left(\sqrt{6}\right)$ $l\,n\left(3\sqrt{2}\right)$

الأجوبة:

$$l\,n(6)=l\,n(2\times 3)=l\,n(2)+l\,n(3)\simeq 0,7+1,1\simeq 1,8$$
$$l\,n(4)=l\,n(2\times 2)=l\,n(2^2)=2l\,n(2)\simeq 2\times 0,7\simeq 1,4$$
$$l\,n(8)=l\,n(2\times 2\times 2)=l\,n(2^3)=3l\,n(2)\simeq 3\times 0,7\simeq 2,1$$
$$\ln(72)=\ln(9\times 8)=\ln(9)+\ln(8)=\ln(3^2)+\ln(2^3)$$
$$l\,n\left(\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}l\,n(2)\simeq\frac{1}{2}\times 0,7\simeq 0,35$$
$$l\,n(72)=l\,n(3^2\times 2^3)=l\,n(3^2)+l\,n(2^3)=2l\,n(3)+3l\,n(2)$$
$$l\,n(72)\simeq 2\times 1,1+3\times 0,7\simeq 2,2+2,1\simeq 4,3$$
$$l\,n\left(\frac{3}{2}\right)=l\,n(3)-l\,n(2)\simeq 1,1-0,7\simeq 0,4$$
$$l\,n\left(\frac{1}{2}\right)=-l\,n(2)\simeq -0,7$$
$$l\,n\left(\sqrt{6}\right)=\frac{1}{2}l\,n(6)\simeq\frac{1}{2}\times 1,8\simeq 0,9$$
$$\ln\left(3\sqrt{2}\right)=\ln(3)+\ln\left(\sqrt{2}\right)\simeq 1,1+\frac{1}{2}\ln(2)\simeq 1,1+\frac{0,7}{2}\simeq 1,1+0,35\simeq 1,45$$

تمرين2:

1) إذا علمت أن $\ln(2)\simeq 0,7$ و $\ln(5)\simeq 1,6$ فاحسب ما يلي:

$\ln(10)$ و $\ln(25)$ و $\ln(16)$ و $\ln(125)$ و $\ln\left(\frac{1}{5}\right)$ و $\ln\left(\frac{2}{5}\right)$ و $\ln\left(\sqrt{5}\right)$ و $\ln\left(2\sqrt{5}\right)$

2) تحقق أن : $2\ln 4+\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\ln(8)=0$

الأجوبة:1)

$$l\,n(10)=l\,n(2\times 5)=l\,n(2)+l\,n(5)$$
$$\simeq 0,7+1,6\simeq 2,3$$
$$l\,n(25)=l\,n(5\times 5)=l\,n(5^2)\simeq 2l\,n(5)\simeq 2\times 1,6\simeq 3,2$$
$$l\,n(16)=l\,n(2\times 2\times 2\times 2)=l\,n(2^4)=4l\,n(2)\simeq 4\times 0,7\simeq 2,8$$
$$l\,n(125)=l\,n(5\times 5\times 5)=l\,n(5^3)=3l\,n(5)\simeq 4\times 1,6\simeq 6,4$$
$$l\,n\left(\frac{1}{5}\right)=-l\,n(5)\simeq -1,6$$
$$l\,n\left(\frac{2}{5}\right)=l\,n(2)-l\,n(5)\simeq 0,7-1,6\simeq -0,9$$
$$\ln\left(\sqrt{5}\right)=\frac{1}{2}\ln(5)\simeq\frac{1}{2}\times 1,6\simeq 0,8=0,7+\frac{1}{2}(1,6)$$
$$\ln\left(2\sqrt{5}\right)=\ln(2)+\ln\left(\sqrt{5}\right)=\ln(2)+\frac{1}{2}\ln(5)=0,7+0,8=1,5$$

2) $2\ln 4+\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\ln(8)=0$????

$$2l\,n\,4+l\,n\left(\frac{1}{2}\right)-l\,n(8)=2\ln 2^2-l\,n(2)-l\,n(2^3)$$
$$=2\times 2\ln 2-l\,n(2)-3l\,n(2)=4\ln 2-l\,n(2)-3l\,n(2)=0$$

تمرين3: بسط

1. $A=\ln(3)-\ln(5)+\ln(15)$
2. $B=\ln(0,01)-\ln(1000)+\ln(10^6)$

الأجوبة:1)

$$A=\ln(3)-\ln(5)+\ln(15)=\ln(3)-\ln(5)+\ln(3\times 5)$$
$$A=\ln(3)-\ln(5)+\ln 3+\ln 5=2\ln(3)=\ln(3^2)=\ln(9)$$
$$B=\ln(10^{-2})-\ln(10^3)+\ln(10^6)=-2\ln(10)-3\ln(10)+6\ln(10)$$
$$B=\ln(10)=\ln(2\times 5)=\ln 2+\ln 5$$

تمرين4: إذا علمت أن $l\,n(2)\simeq 0,7$ و $l\,n(11)\simeq 2,4$ فاحسب ما يلي:

$l\,n(22)$ $l\,n(121)$ $l\,n(32)$ $l\,n(44)$ $l\,n\left(\frac{11}{2}\right)$

الأجوبة:

$$l\,n(22)=l\,n(2\times 11)=l\,n(2)+l\,n(11)\simeq 0,7+2,4\simeq 3,1$$
$$l\,n(121)=l\,n(11\times 11)=l\,n(11^2)=2l\,n(11)\simeq 2\times 2,4\simeq 4,8$$
$$l\,n(32)=l\,n(2\times 2\times 2\times 2\times 2)=l\,n(2^5)=5l\,n(2)\simeq 5\times 0,7\simeq 3,5$$
$$=\ln(3^2)+\ln(2^3)$$
$$\ln(44)=\ln(4\times 11)=\ln(4)+\ln(11)=2\ln(2)+\ln(11)$$
$$\ln(44)\simeq 2\times 0,7+2,4\simeq 1,4+2,4\simeq 3,8$$
$$l\,n\left(\frac{11}{2}\right)=l\,n(11)-l\,n(2)\simeq 2,4-0,7\simeq 1,7$$

تمرين5: أحسب النهايات التالية : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln(x)+1$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)+1}{\ln x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}$

الأجوبة: 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln(x)+1 = 2\times(+\infty)+1 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)+1}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+1}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x\left(2+\frac{1}{\ln x}\right)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{\ln x} = 2+0 = 2$

3) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$ لأن : $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x) = -\infty$

تمرين 6:

1) أحسب وبسط :

$A = \ln\left(e^2\right)+\ln\left(e^4\right)-\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

$B = 2\ln\left(\sqrt{e}\right)+\ln\left(e\sqrt{e}\right)-\frac{1}{3}\ln\left(e^9\right)$

2) حل المعادلة $\ln(x) = 7$ يعني $x = e^7$

الأجوبة: 1) $A=\ln\left(e^2\right)+\ln\left(e^4\right)-\ln\left(\frac{1}{e}\right)=2\ln(e)+4\ln(e)--\ln(e)$

$A=2\times1+4\times1--1=7$

$B=2\ln\left(\sqrt{e}\right)+\ln\left(e\sqrt{e}\right)-\frac{1}{3}\ln\left(e^9\right)=2\times\frac{1}{2}\ln(e)+\ln e+\ln\left(\sqrt{e}\right)-\frac{1}{3}9\ln(e)$

$B=1\ln(e)+\ln e+\frac{1}{2}\ln(e)-3\ln(e)=1+1+\frac{1}{2}-3=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

2) $\ln(x) = 7$ المعادلة لها معنى اذا كان : $x>0$

$\ln(x) = 7$ يعني $x = e^7$

ومنه : $S = \left\{e^7\right\}$

تمرين 7: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $\ln(x) = 0$ 2) $\ln(x) = 1$ 3) $\ln(x) = 7$

4) $\ln(x+1) = \ln(3)$

5) $\ln(x)\left(\ln(x)-1\right) = 0$ 6) $\left(\ln x+1\right)\left(\ln x-1\right) = 0$

الأجوبة: الكتابة $\ln(x)$ لها معنى إذا كان $x>0$.

1) يجب أن يكون $x \succ 0$ في المعادلة $\ln(x) = 0$

و منه مجموعة تعريف هذه المعادلة هي $]0,+\infty[$

المعادلة $\ln(x) = 0$ تكافئ $\ln(x) = \ln(1)$ و منه $x = 1$

و بما أن $1\in]0,+\infty[$ فان مجموعة حلول المعادلة هي: $S = \{1\}$

2) مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x) = 1$ هي $]0,+\infty[$

و هي تكافئ $\ln(x) = \ln(e)$ أي $x = e$

و بما أن $e\in]0,+\infty[$ فان $S = \{e\}$

3) مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x) = 7$ هي $]0,+\infty[$

و هي تكافئ $\ln(x) = \ln\left(e^7\right)$ أي $x = e^7$ و بما أن $e^7\in]0,+\infty[$

فان $S = \left\{e^7\right\}$.

4) يجب أن يكون $x+1>0$ أي $x>-1$

و منه مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x+1) = \ln(3)$ هي $]-1,+\infty[$

المعادلة تكافئ $x+1=3$ أي $x=2$ و بما أن $2\in]-1,+\infty[$

فان $S = \{2\}$

5) مجموعة تعريف المعادلة هي $]0,+\infty[$

$\ln(x) = 0$ أو $\ln(x)-1=0 \Leftrightarrow \ln(x)\left(\ln(x)-1\right)=0$

يعني $\ln(x) = 0$ أو $\ln(x) = 1$

يعني $\ln(x) = \ln(1)$ أو $\ln(x) = \ln(e)$

يعني $x = 1$ أو $x = e$ ومنه فان $S = \{1,e\}$

6) مجموعة تعريف المعادلة هي $]0,+\infty[$

$\ln x+1=0$ أو $\ln x-1=0 \Leftrightarrow \left(\ln x+1\right)\left(\ln x-1\right)=0$

يعني $\ln(x) = 1$ أو $\ln x = -1$

يعني $\ln(x) = -\ln(e)$ أو $\ln(x) = \ln(e)$

يعني $x = e$ أو $x = e$ يعني $\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$ أو $x = \frac{1}{e}$

ومنه فان $S = \left\{\frac{1}{e},e\right\}$

تمرين 8: نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x) = \ln x+1$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f

2. أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f\left(e^2\right)$ و $f\left(\frac{1}{e}\right)$

3. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$

و ادرس اشارة المشتقة

4. أحسب $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

5. أعط جدول تغيرات الدالة f.

الأجوبة:

1. مجموعة تعريف الدالة f هي $]0,+\infty[$

2. $f(1) = \ln(1)+1 = 1$

$f(e) = \ln(e)+1 = 1+1 = 2$

$f\left(e^2\right) = \ln e^2+1 = 2\ln e+1 = 2\times1+1 = 3$

$f\left(\frac{1}{e}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\right)+1 = -\ln e+1 = -1+1 = 0$

3. حساب $f'(x)$:

$f'(x) = \left(\ln(x)+1\right)' = \left(\ln(x)\right)'+(1)' = \frac{1}{x} > 0$

لأن x موجب قطعا.

4. حساب $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$:

لدينا $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x) = -\infty$ اذن $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$.

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$ اذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

5. ومنه جدول تغيرات f هو كما يلي:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

تمرين 9: نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x)=2\ln x-x$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f
2. أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(e^2)$
3. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$
4. ادرس اشارة مشتقة الدالة
5. أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

الأجوبة:

1. مجموعة تعريف الدالة f هي $]0,+\infty[$
2. $f(1)=2\ln(1)-1=0-1=-1$ و $f(e)=2\ln(e)-e=2-e$

$$f(e^2)=2\ln e^2-e^2=4\ln e-e^2=4\times 1-e^2=4-e^2$$

3. حساب $f'(x)$: $f'(x)=\dfrac{2}{x}-1=\dfrac{2-x}{x}$
4. اشارة $f'(x)$ هي اشارة $(2-x)$ لأن x موجب قطعا.
5. لدينا $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$ اذن $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

تمرين 10: نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x)=\ln x+x$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f
2. أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(e^2)$
3. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$
4. أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

أجوبة : 1) مجموعة تعريف الدالة f هي $]0,+\infty[$

2) $f(1)=\ln(1)+1=0+1=1$ و $f(e)=\ln(e)+e=1+e$

$$f(e^2)=\ln e^2+e^2=2\ln e+e^2=2\times 1+e^2=2+e^2$$

3) حساب $f'(x)$: $f'(x)=\dfrac{1}{x}+1=\dfrac{1+x}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x+x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x+x=+\infty$

تمرين 12: علما أن $\log(2)\simeq 0,3$ أحسب $\log(20)$ و $\log(2000)$

أجوبة :

$$\log(20)=\log(2\times 10)=\log(2)+\log(10)$$
$$\simeq 0,3+1\simeq 1,3$$
$$\log(2000)=\log(2\times 1000)=\log(2)+\log(1000)$$
$$=\log(2)+\log(10^3)$$
$$=\log(2)+3\log(10)$$
$$\simeq 0,3+3\times 1\simeq 3,3$$

تمرين 13: بسط وأحسب :

$A=\log(0,01)-\log(1000)+\log(10^6)$ و $B=\log(10)+2\log(100)+\log(10^4)$ $C=\log(4)+\log(25)$ $D=1+2\log 2-\log(40)$

$E=\log(900)+2\log\left(\dfrac{1}{3}\right)-2$

أجوبة : $A=\log(10^{-2})-\log(10^3)+\log(10^6)$

$$A=-2\log(10)-3\log(10)+6\log(10)$$
$$A=-2-3+6=1$$
$$B=\log(10)+2\log(100)+\log(10^4)$$

$B=1+2\log\left(10^2\right)+\log\left(10^4\right)=1+2\times2+4\log(10)=1+4+4$ ومنه $B=9$

$C=\log(4)+\log(25)=\log(4\times25)=\log(100)$

$C=\log\left(10^2\right)=2\log(10)=2\times1=2$ $\log(300)=\log(3\times100)=\log(3)+\log(100)\simeq0,47+2\simeq2,47$

$D=1+2\log2-\log(40)=1+\log2^2-\left(\log(4\times10)\right)$

$D=1+l\,og2^2-\left(l\,og4+l\,og10\right)=1+l\,og4-l\,og4-l\,og10$

$D=1+l\,og4-l\,og4-1=0$

$E=\log(900)+2\log\left(\frac{1}{3}\right)-2=\log(9\times100)-2\log(3)-2$

$E=\log9+\log100-2\log(3)-2$

$E=\log3^2+\log10^2-2\log(3)-2$

$E=2\log3+2\log10-2\log(3)-2$

ومنه $E=2\log10-2=2\times1-2=0$

<u>تمرين 11:</u> علما أن $\log(3)\simeq0,47$ و $\log(5)\simeq0,7$

أحسب $\log(15)$ و $\log\left(\sqrt{5}\right)$ و $\log\left(\frac{1}{3}\right)$ و $\log(50)$ و $\log(300)$

<u>أجوبة :</u>

$\log(15)=\log(5\times3)=\log(5)+\log(3)\simeq0,7+0,47\simeq1,17$

$\log\left(\sqrt{5}\right)=\frac{1}{2}\log(5)\simeq\frac{1}{2}\times0,7\simeq0,35$

$\log\left(\frac{1}{3}\right)=-\log(3)\simeq-0,47$

$\log(50)=\log(5\times10)=\log(5)+\log(10)\simeq0,7+1\simeq1,7$