

سلسلة 1	الدوال اللوغارتمية	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية
<p>تمرين 1: حدد مجموعة تعريف الدوال التالية:</p> $p(x) = \frac{3}{1 - \ln(x)} \quad , \quad h(x) = \ln(5 - x) + \ln(x^2 - 3) \quad , \quad g(x) = \ln(x^2 - 2x + 5) \quad , \quad f(x) = \ln(x^2 + 2x)$		
<p>تمرين 2:</p> <p>1, حل في IR المعادلات: $\ln(x^2 + 1) = 1$ و $\ln(x^2 - 3) = \ln(2x)$ و $\ln(x^2 + 2x) = 0$</p> <p>2, حل في IR المتراجحة: $\ln(x+1) \geq \ln(2x)$</p>		
<p>تمرين 3:</p> <p>1, احسب: $\ln(\sqrt{\sqrt{2}+1}) + \ln(\sqrt{\sqrt{2}-1})$</p> <p>2, حدد قيمة مقربة لكل من: $\ln(\sqrt{6})$ و $\ln(\frac{16}{9})$ و $\ln(\sqrt[3]{12})$ علما أن: $\ln(2) \cong 0,7$ و $\ln(3) \cong 1,1$</p>		
<p>تمرين 4: حدد $f'(x)$ في كل حالة مما يلي دون تحديد مجموعة التعريف:</p> $f(x) = x \ln(x) + \frac{\ln(\sqrt{x})}{x} \quad , \quad f(x) = \ln^3(x) \quad , \quad f(x) = \ln(1 + \ln(x)) \quad , \quad f(x) = \ln(7 - x^2) \quad , \quad f(x) = \ln(2x + 1)$		
<p>تمرين 5: احسب النهايات التالية:</p> <p>1, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} + \ln\left(\frac{x^2 + 5}{x^2 + 1}\right)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x) + \frac{1}{\ln(x)}$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2(x) - x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x + 2}$</p> <p>2, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) + \sqrt{x} \ln(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) - x$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} + \ln\left(\frac{x^2 + 5}{x^2 + 1}\right)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(2x) + \frac{1}{\ln(x)}$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) \ln(x+1)$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x) - \ln(2)}{x - 2}$</p>		
<p>تمرين 6: احسب النهايات التالية:</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-3} \ln\left(\frac{x}{3}\right)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x+3) - \ln(x+5)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(x)}$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\ln(x)} - \sqrt[3]{x}$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x - \ln(x)}{2 + \ln(x)}$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x^3 + 7x)$</p>		

سلسلة 1	الدوال اللوغارتمية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية
تمرين 1 : لنحدد مجموعة تعريف الدوال التالية :		
$Df = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x(x+2) > 0\} =]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$		$f(x) = \ln(x^2 + 2x)$
$Dg = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x + 5 > 0\} = \mathbb{R}$ لأن $\Delta = 4 - 20 < 0$		$g(x) = \ln(x^2 - 2x + 5)$
$Dh = \{x \in \mathbb{R} / 5 - x > 0 \text{ et } x^2 - 3 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / 5 - x > 0 \text{ et } x^2 > 3\}$ $= \{x \in \mathbb{R} / x < 5 \text{ et } (x > \sqrt{3} \text{ ou } x < -\sqrt{3})\}$ $= \{x \in \mathbb{R} / (x < 5 \text{ et } x > \sqrt{3}) \text{ ou } (x < 5 \text{ et } x < -\sqrt{3})\}$ $Dh =]\sqrt{3}; 5[\cup]-\infty; -\sqrt{3}[=]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; 5[$		$h(x) = \ln(5 - x) + \ln(x^2 - 3)$
$Dp = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } 1 - \ln x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } \ln x \neq 1\}$ $= \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } \ln x \neq \ln e\} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } x \neq e\}$ $Dp =]0; e[\cup]e; +\infty[[$		$p(x) = \frac{3}{1 - \ln(x)}$
تمرين 2		
<p>مجموعة صلاحية المعادلة هي : $D =]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$</p> <p>الآن : $\ln(x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 2x) = \ln 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 = 0$</p> <p>بعد حساب المحددة نجد :</p> $\Delta = 4 + 4 = 8 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2} \approx 0,41 \in D \\ x_2 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2} \approx -2,41 \in D \end{cases}$ <p>إذن : $S = \{-1 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}\}$</p> <p>قبل إنجاز المعادلات أو المتراجحات يجب تحديد مجموعة صلاحية المعادلة وبعد إيجاد الحلول يجب التحقق من الحلول التي تنتمي لمجموعة الصلاحية ، طريقة الجواب أعلاه تمثل اختصارا لهذه الطريقة باستعمال الرموز الرياضية ، وقد استعملنا خلالها نتيجة 1 من التمرين السابق. أخيرا استعملنا تقريبا للحلول لنستطيع أن نحدد الحلول التي تنتمي لمجموعة صلاحية المعادلة $]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$ (وجدنا كلا الحلين ينتمي لمجموعة الصلاحية)</p>		$\ln(x^2 + 2x) = 0$
$D = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3 > 0 \text{ et } 2x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 > 3 \text{ et } x > 0\}$ $D = \{x \in \mathbb{R} / x > \sqrt{3}\} =]\sqrt{3}; +\infty[$ $\ln(x^2 - 3) = \ln(2x) \Leftrightarrow x^2 - 3 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Delta = 4 + 12 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2 + 4}{2} = 3 \in D \\ x_2 = \frac{2 - 4}{2} = -1 \notin D \end{cases}$ <p>بالتالي : $S = \{3\}$</p>		$\ln(x^2 - 3) = \ln(2x)$
$D = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3 > 0\} = \mathbb{R}$ $\ln(x^2 + 1) = 1 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = \ln(e) \Leftrightarrow x^2 + 1 = e$ $\ln(x^2 + 1) = 1 \Leftrightarrow x^2 = e - 1$ $\ln(x^2 + 1) = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{e - 1} \text{ ou } x = -\sqrt{e - 1}$ <p>بالتالي : $S = \{\sqrt{e - 1}, -\sqrt{e - 1}\}$</p>		$\ln(x^2 + 1) = 1$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x+1 > 0 \text{ et } 2x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x > -1 \text{ et } x > 0\} =]0; +\infty[$$

$$\ln(x+1) \geq \ln(2x) \Leftrightarrow x+1 \geq 2x \Leftrightarrow x-2x \geq -1 \Leftrightarrow -x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq 1$$

$$S =]-\infty; 1] \cap]0; +\infty[=]0, 1] \quad \text{بالتالي :}$$

2

تمرين 3 :

$$\ln(\sqrt{\sqrt{2}+1}) + \ln(\sqrt{\sqrt{2}-1}) = \ln(\sqrt{\sqrt{2}+1} \times \sqrt{\sqrt{2}-1}) = \ln(\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}) = \ln(\sqrt{2-1}) = \ln(1) = 0$$

1

استعملنا الخاصية : $\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$

$$\ln(\sqrt{6}) = \frac{1}{2} \ln(6) = \frac{1}{2} (\ln(2) + \ln(3)) \approx \frac{0,7 + 1,1}{2} \approx 0,9$$

$$\ln\left(\frac{16}{9}\right) = \ln(16) - \ln(9) = \ln(2^4) - \ln(3^2) = 4 \ln(2) - 2 \ln(3) \approx 4 \times 0,7 - 2 \times 1,1 \approx 2,8 - 2,2 \approx 0,6$$

2

$$\ln(\sqrt[3]{12}) = \frac{1}{3} \ln(12) = \frac{1}{3} \ln(2^2 \times 3) = \frac{2 \ln(2) + \ln(3)}{3} \approx \frac{1,4 + 1,1}{3} \approx \frac{2,5}{3} \approx 0,8$$

$$\ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \ln(x) \quad \text{و} \quad \ln(x^r) = r \ln(x) \quad \text{و} \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad \text{استعملنا الخاصيات :}$$

تمرين 4 :

$$f(x) = \ln(1 + \ln(x))$$

$$f'(x) = \frac{(1 + \ln(x))'}{1 + \ln(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \ln(x)}$$

$$f(x) = \ln(7 - x^2)$$

$$f'(x) = \frac{(7 - x^2)'}{7 - x^2} = \frac{-2x}{7 - x^2}$$

$$f(x) = \ln(2x+1)$$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)'}{2x+1} = \frac{2}{2x+1}$$

$$f(x) = x \ln(x) + \frac{\ln(\sqrt{x})}{x}$$

$$f'(x) = (x \ln(x))' + \left(\frac{1}{2} \frac{\ln(x)}{x}\right)'$$

$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \times \frac{x - 1 \times \ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \ln(x) + 1 + \frac{1 - \ln(x)}{2x^2}$$

$$f(x) = \ln^3(x)$$

$$f'(x) = 3(\ln^2(x))(\ln(x))'$$

$$f'(x) = 3 \ln^2(x) \times \frac{1}{x}$$

من المستحسن استعمال خصائص دالة اللوغاريتم قبل الاشتقاق

$$\ln(u(x))' = \frac{(u(x))'}{u(x)} \quad \text{للتذكير :}$$

تمرين 5 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} + \ln\left(\frac{x^2+5}{x^2+1}\right) = 0 + \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{لأن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0 + 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x) + \frac{1}{\ln(x)} = +\infty$$

$$(+\infty + 0 \rightarrow +\infty)$$

1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln(x)}{x} - 1\right) = -\infty$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0 \quad r > 0 \quad \text{لأن: لكل}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} - 1 = 0 - 1 = -1 \quad \text{لأن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x+2} \times \frac{\ln(x)}{x} = 2 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln^2(x)}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\left[\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \right]^2 - 1 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(2x) + \frac{1}{\ln(x)} = -\infty \quad (-\infty + 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty \quad \left(\frac{-\infty}{0^+} \rightarrow -\infty \right) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x^2+5}{x^2+1}\right) = \ln(5) : \text{لأن} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} + \ln\left(\frac{x^2+5}{x^2+1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \quad \text{باستعمال النهاية الخاصة:} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) - x = 0 - 0 = 0$$

2

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) + \sqrt{x} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \times [x \ln(x)] + \sqrt{x} \ln(\sqrt{x^2}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \times [x \ln(x)] + 2\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) = 0 \times 0 + 2 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) \frac{\ln(x+1)}{x} = 0 \times 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x) - \ln(2)}{x - 2} = \ln'(2) = \frac{1}{2}$$

تمرين 6 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(x)} = 2 \quad \left(\frac{0}{+\infty} \rightarrow 0 \right) \end{aligned}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2 : \text{لأن} \right) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x+3) - \ln(x+5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2x+3}{x+5}\right) = \ln(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-3} \ln\left(\frac{x}{3}\right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-3} (\ln(x) - \ln(3)) = \lim_{x \rightarrow 3} x \frac{\ln(x) - \ln(3)}{x-3} = 3 \times \ln'(3) = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x^3 + 7x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x(x^2 + 7)) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) + x \ln(x^2 + 7) = 0 + 0 \times \ln(7) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x - \ln(x)}{2 + \ln(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x+2-2-\ln(x)}{2+\ln(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x+2}{2+\ln(x)} - 1 = 0 - 1 = -1 \quad \left(\frac{2}{-\infty} \rightarrow 0 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\ln(x)} - \sqrt[3]{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \left(\sqrt[3]{\frac{\ln(x)}{x}} - 1 \right) = -\infty$$

⬢ لاحظ من خلال هذه الأمثلة أنه لا توجد طريقة محددة للتعامل مع نهايات دالة اللوغاريتم، عليك محاولة استثمار الأفكار من كل نهاية