

مجموعة تعريف المعادلة هي : $D =]3; +\infty[$

$$\begin{aligned}(E_1) &\Leftrightarrow \ln((x+2)(x+3)) = \ln(x^2 + 2x - 15) \\ &\Leftrightarrow (x+2)(x+3) = x^2 + 2x - 15 \\ &\Leftrightarrow x = -7\end{aligned}$$

$$S = \emptyset \quad \text{إذن} \quad -7 \notin D$$

$$(E_2) \quad \ln|x+2| + \ln|x+3| = \ln|x^2 + 2x - 15| \quad -2$$

مجموعة تعريف المعادلة هي : $D = \mathbb{R} - \{-5; -3; -2; 3\}$

$$\begin{aligned}(E_2) &\Leftrightarrow \ln(|x+2||x+3|) = \ln|x^2 + 2x - 15| \\ &\Leftrightarrow |(x+2)(x+3)| = |x^2 + 2x - 15| \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x - 15 \\ \text{ou} \\ x^2 + 5x + 6 = -x^2 - 2x + 15 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ \text{ou} \\ x = -\frac{9}{2} \text{ ou } x = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

$$S = \left\{-7; -\frac{9}{2}; 1\right\}$$

$$(E_3) \quad \ln((x+2)(x+3)) = \ln(x^2 + 2x - 15) \quad -3$$

مجموعة تعريف المعادلة هي : $D =]-\infty; -5[\cup]3; +\infty[$

$$\begin{aligned}(E_1) &\Leftrightarrow \ln((x+2)(x+3)) = \ln(x^2 + 2x - 15) \\ &\Leftrightarrow (x+2)(x+3) = x^2 + 2x - 15 \\ &\Leftrightarrow x = -7\end{aligned}$$

$$S = \{-7\} \quad \text{إذن}$$

$$(E_4) \quad \ln^2 x - 7 \ln x + 6 = 0 \quad -4$$

مجموعة تعريف المعادلة هي : $D =]0; +\infty[$

$$\begin{aligned}(E_4) &\Leftrightarrow \ln^2 x - 7 \ln x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x = 1 \text{ ou } \ln x = 6 \\ &\Leftrightarrow x = e \text{ ou } \ln \sqrt[6]{x} = 1 \\ &\Leftrightarrow x = e \text{ ou } x = e^6\end{aligned}$$

$$S = \{e; e^6\}$$

تمرين 2

حل في \mathbb{R} المتراجحات :

$$\ln(x-1) \leq 0 \quad -1$$

$$\ln(x-1) - \ln(2x-4) > 0 \quad -2$$

الدوال اللوغاريتمية

تمرين 1

حل في \mathbb{R} :

$$\ln(x+2) + \ln(x+3) = \ln(x^2 + 2x - 15) \quad -1$$

$$\ln|x+2| + \ln|x+3| = \ln|x^2 + 2x - 15| \quad -2$$

$$\ln((x+2)(x+3)) = \ln(x^2 + 2x - 15) \quad -3$$

$$\ln^2 x - 7 \ln x + 6 = 0 \quad -4$$

$$\ln \sqrt{x+4} - \ln \sqrt{x-1} = \ln \sqrt{x} \quad -5$$

الحل

$$(E_1) \quad \ln(x+2) + \ln(x+3) = \ln(x^2 + 2x - 15) \quad -1$$

$$\begin{cases} \ln(x) - \ln(y) = 1 \\ (\ln(x))^2 + (\ln(y))^2 = 13 \end{cases} \quad \text{-1}$$

$$\begin{cases} 3\ln(x^5) + \ln(\sqrt{\frac{1}{y}}) = 6 \\ \ln(\frac{1}{x^8}) + \ln(\sqrt[3]{y}) = 1 \end{cases} \quad \text{-2}$$

$$\begin{cases} \ln(xy^2\sqrt{x}) = 10 \\ \ln(\frac{x}{y\sqrt{y}}) = 1 \end{cases} \quad \text{-3}$$

الحل

$$(S_1) \begin{cases} \ln(x) - \ln(y) = 1 \\ (\ln(x))^2 + (\ln(y))^2 = 13 \end{cases} \quad \text{-1}$$

مجموعة تعريف النظمة هي : $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) - \ln(y) = 1 \\ (\ln(x))^2 + (\ln(y))^2 = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) - \ln(y) = 1 \\ (\ln(x))^2 + (\ln(y))^2 = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) - \ln(y) = 1 \\ \ln(x)\ln(y) = 6 \end{cases}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) - \ln(y) = 1 \\ \ln(x)\ln(y) = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) - \ln(y) = 1 \\ (\ln(x))^2 - \ln(x) - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(y) = \ln(x) - 1 \\ \ln(x) = -2 \text{ ou } \ln(x) = 3 \end{cases}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(y) = -3 \\ \ln(x) = -2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \ln(y) = 2 \\ \ln(x) = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(\sqrt[3]{\frac{1}{y}}) = 1 \\ \ln(\sqrt{\frac{1}{x}}) = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \ln(\sqrt{y}) = 1 \\ \ln(\sqrt[3]{x}) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{-3} \\ x = e^{-2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = e^2 \\ x = e^3 \end{cases}$$

$$S = \{(e^{-2}; e^{-3}); (e^3; e^2)\}$$

$$\ln \frac{3x-1}{x-1} \geq 0 \quad \text{-3}$$

الحل

$$(I_1) \quad \ln(x-1) \leq 0 \quad \text{-1}$$

مجموعة تعريف المتراجحة هي : $D =]1; +\infty[$

$$(I_1) \Leftrightarrow \ln(x-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x-1) \leq \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x-1 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq 2$$

$$S =]1; 2]$$

$$(I_2) \quad \ln(x-1) - \ln(2x-4) > 0 \quad \text{-2}$$

مجموعة تعريف المتراجحة هي : $D =]2; +\infty[$

$$(I_2) \Leftrightarrow \ln(x-1) - \ln(2x-4) > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x-4}{2x-4}\right) > \ln 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-4} > 1$$

$$\Leftrightarrow x-1 > 2x-4$$

$$\Leftrightarrow x < 3$$

$$S =]2; 3[$$

$$(I_3) \quad \ln \frac{3x-1}{x-1} \geq 0 \quad \text{-3}$$

مجموعة تعريف المتراجحة هي : $D =]-\infty; \frac{1}{3}[\cup]1; +\infty[$

$$(I_3) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x-4}{2x-4}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x-4}{2x-4}\right) > \ln 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-4} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-4} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+3}{2x-4} > 0$$

$$S =]2; 3[\cap \left(]-\infty; \frac{1}{3}[\cup]1; +\infty[\right)$$

$$S =]2; 3[$$

تمرين 3

حل في \mathbb{R}^2 النظمات التالية :

تمرين 5

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^5}{x^2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 (\ln x)^2 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-2)}{\sqrt[3]{x^2}} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{x}} = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \ln(x^2 + 1)) = -5$$

الحل

-1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^5}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^5}{\left(\frac{2}{x^5}\right)^5} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\frac{2}{x^5}} \right)^5 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^5}{x^2} = 0}$$

-2

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 (\ln x)^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2 (\ln x)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 (\ln x)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{3}{2}} \ln x \right)^2$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 (\ln x)^2 = 0}$$

-3

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-2)}{\sqrt[3]{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-2)}{(x-2)^{\frac{2}{3}}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^{\frac{2}{3}}} \right) \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x} \right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-2)}{\sqrt[3]{x^2}} = 0 \times 1$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-2)}{\sqrt[3]{x^2}} = 0}$$

-4

$$(S_1) \begin{cases} 3 \ln(x^5) + \ln\left(\sqrt{\frac{1}{y}}\right) = 6 \\ \ln\left(\frac{1}{x^8}\right) + \ln(\sqrt[3]{y}) = 1 \end{cases} \quad -2$$

مجموعة تعريف النظمة هي : $D = \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \ln(x^5) + \ln\left(\sqrt{\frac{1}{y}}\right) = 6 \\ \ln\left(\frac{1}{x^8}\right) + \ln(\sqrt[3]{y}) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15 \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(y) = 6 \\ -8 \ln(x) + \frac{1}{3} \ln(y) = 1 \end{cases}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) = \frac{5}{2} \\ \ln(y) = 63 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{\frac{5}{2}} \\ y = e^{63} \end{cases}$$

$$\boxed{S = \left\{ \left(e^{\frac{5}{2}}; e^{63} \right) \right\}}$$

تمرين 4

a و b عدنان حقيقيان موجبان قطعاً

$$\frac{1}{3} \ln\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \ln \sqrt[6]{a} + \ln \sqrt[6]{b} \quad \text{بحيث :}$$

$$\text{بين أن : } \frac{a}{b} + 2 = 3\sqrt{\frac{a}{b}}$$

الحل

$$(E) \quad \frac{1}{3} \ln\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \ln \sqrt[6]{a} + \ln \sqrt[6]{b}$$

$$(E) \Leftrightarrow \frac{1}{3} \ln\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \ln \sqrt[6]{a} + \ln \sqrt[6]{b} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\sqrt[6]{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^2}\right) = \ln \sqrt[6]{ab}$$

$$(E) \Leftrightarrow \left(\frac{a+2b}{3}\right)^2 = ab$$

$$\Leftrightarrow a+2b = 3\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+2b}{b} = \frac{3\sqrt{ab}}{b}$$

$$\boxed{(E) \Leftrightarrow \frac{a}{b} + 2 = 3\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

الحل

I - نعتبر x من $]-\infty; 0[$
 $g(x) = x + 1 + \ln(-x)$

$$g'(x) = \frac{x+1}{x}$$

x	$-\infty$	-1	0
$g(x)$		$\blacktriangledown g(-1)$	

من جدول التغيرات نستنتج :

$$\forall x \in]-\infty; 0[: g(x) \leq g(-1)$$

$$\text{بما أن : } g(-1) = 0$$

$$\text{فإن : } \forall x \in]-\infty; 0[: g(x) \leq 0$$

II - نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x \ln(-x) & x \in]-\infty; 0[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

-1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x \ln(-x) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 - 2t \ln(t) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \left(1 - 2 \frac{\ln(t)}{t} \right)$$

$$\text{فإن } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0 \text{ : بما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty (1 - 0) :$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

-2 أ-

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 2x \ln(-x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 - 2t \ln(t)$$

$$\text{فإن : } \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0 \text{ : بما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 - 0$$

$$\text{ومنه : } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

$$f(0) = 0 \text{ : ولدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \text{ : إذن :}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(2x+1)}{2x} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(t+1)}{t} \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{x}} = 1 \times 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{x}} = 0$$

-5

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \ln(x^2 + 1)) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(x^2 + 1) - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} \left(\frac{\ln(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} - \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1}} \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \ln(x^2 + 1)) = +\infty (0 - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \ln(x^2 + 1)) = -\infty$$

تمرين 6

I - نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty; 0[$ بما يلي :

$$g(x) = x + 1 + \ln(-x)$$

$$\text{بين أن : } \forall x \in]-\infty; 0[: g(x) \leq 0$$

II - نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x \ln(-x) & x \in]-\infty; 0[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{-1 بين أن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{-2 أ- بين أن : } f \text{ متصلة في } 0$$

$$\text{-3 بين أن : } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$$

أول النتيجة هندسيا .

-4 ادرس رتبة f

$$\text{-5 بين أن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

أول النتيجة هندسيا .

-6 أ- بين أن (C_f) يقبل النقطة ذات الأفصول -1 نقطة انعطاف

ب- حدد معادلة المماس ل (C_f) عند النقطة

ذات الأفصول -1

-7 ضع جدول تغيرات f ثم أنشئ (C_f) التمثيل

المبياني ل f على معلم متعامد ممنظم

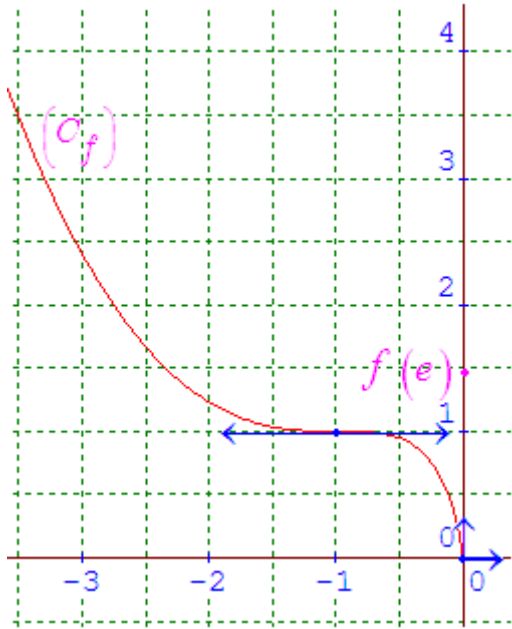
ومنه : (C_f) يقبل النقطة ذات الأفصول -1 نقطة انعطاف

ب- لدينا : $f(-1)=1$ و $f'(-1)=0$
 إذن: $y=1$ هي معادلة المماس ل (C_f) عند النقطة ذات الأفصول -1

7-جدول تغيرات f

x	$-\infty$	0
$f(x)$	$+\infty$	0

إنشاء (C_f)



(الوحدة 2cm)

تمرين 7

I- نعتبر الدالة f المعرفة على $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

1- بين أن f متصلة في 0

2- نعتبر الدالة h_a ($a \neq 0; a \in I$) المعرفة على I

بما يلي :

$$h_a(x) = (\ln(1+2a) - 2a)x^2 - (\ln(1+2x) - 2x)a^2$$

أ- احسب : $h_a(0)$ و $h_a(a)$

إذن: f متصلة في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 2x \ln(-x)}{x} \quad -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 2 \ln(-x) = 0 - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty \quad \text{إذن:}$$

ومنه : (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى يسار النقطة ذات الأفصول 0

4- رتبة f

$$f'(x) = 2g(x) \quad x \in]-\infty; 0[$$

بما أن $\forall x \in]-\infty; 0[: g(x) \leq 0$

فإن f تناقصية على المجال $]-\infty; 0[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x \ln(-x)}{x} \quad -5$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 \ln(-x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -t + 2 \ln(t)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} t \left(-1 + 2 \frac{\ln(t)}{t} \right)$$

ولدينا : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty (-1 + 0) \quad \text{إذن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \quad \text{إذن:}$$

ومنه : محور الأرتاب اتجاه مقارب ل (C_f) بجوار $-\infty$

6- أ- لدينا : $f'(x) = 2g(x) \quad x \in]-\infty; 0[$

إذن: $f''(x) = 2g'(x) \quad x \in]-\infty; 0[$

وحسب I- : $g'(-1) = 0$ و $g'(x)$ تتغير إشارتها بجوار -1

إذن: $f''(-1) = 0$ و $f''(x)$ تتغير إشارتها بجوار -1

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \\ &= 2 \times 1\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

ولدينا : $f(0) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

إذن:

ومنه : f متصلة في 0

2- أ- $(a \neq 0 ; a \in I)$

$$h_a(x) = (\ln(1+2a) - 2a)x^2 - (\ln(1+2x) - 2x)a^2$$

نجد : $h_a(0) = 0$ و $h_a(a) = 0$

إذن : $h_a(a) = h_a(0)$

و بما أن h_a متصلة قابلة على المجال المحصور بين a و 0

فإنه حسب مبرهنة رول : يوجد b محصور بين a و 0

بحيث : $h'_a(b) = 0$

$$h'_a(b) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$$

ب- استنتاج أن : f قابلة للإشتقاق في 0

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(0)}{a} &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} \\ &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{-2}{1+2b}\end{aligned}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(0)}{a} = -2$$

إذن : f قابلة للإشتقاق في 0

$$f'(0) = -2$$

3- أ- لنبين أن : f قابلة للإشتقاق على $I - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$$

حيث أن : $g(x) = 2x - (1+2x)\ln(1+2x)$

ب- لنبين أن : $\forall x \in I - \{0\} : g(x) < 0$

$$g'(x) = -2\ln(1+2x)$$

بين أنه يوجد b محصور بين a و 0 بحيث :

$$\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$$

ب- استنتج أن : f قابلة للإشتقاق في 0

و أن $f'(0) = -2$

3- أ- بين أن : f قابلة للإشتقاق على $I - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$$

حيث أن : $g(x) = 2x - (1+2x)\ln(1+2x)$

ب- بين أن : $\forall x \in I - \{0\} : g(x) < 0$

ج- استنتج تغيرات : f

4- أ- احسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$

أول النتيجةين هندسيا .

ب- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1; 2]$

بحيث : $f(\alpha) = 1$

ج- أنشئ (C_f) التمثيل المبياني ل f على معلم متعامد

ممنظم (نأخذ : $\alpha \approx 1.3$)

(II) 1- نضع : $J = [1; \alpha]$

و $(\forall x \in I) \quad \varphi(x) = \ln(1+2x)$

أ- بين أن : φ قابلة للإشتقاق على I

و أن : $(\forall x \geq 1) \quad 0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$

ب- تحقق أن : $\varphi(\alpha) = \alpha$ و أن $\varphi(J) \subset J$

2- نعتبر المتتالية : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$(\forall n \geq 0) \quad u_{n+1} = \ln(1+2u_n) \quad u_0 = 1$

أ- بين أن : $(\forall n \geq 0) \quad u_n \in J$

ب- بين أن : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

ج- استنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة ثم حدد نهايتها

الحل

-1 -I

$$k(1)k(2) < 0 \text{ و}$$

فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1; 2]$

$$f(\alpha) = 1 \text{ بحيث}$$

إن: يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1; 2]$

$$k(\alpha) = 0 \text{ بحيث}$$

ج- أنشئ (C_f) التمثيل المبياني ل f على معلم متعامد

ممنظم (نأخذ : $\alpha \approx 1.3$)

x	$-1/2$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0

x	$-\infty$	0	$-1/2$
$g(x)$		0	

من جدول التغيرات نستنتج :

$$\forall x \in I - \{0\} : g(x) < 0$$

ج - تغيرات : f
 f تناقصية قطعاً

4- أ-

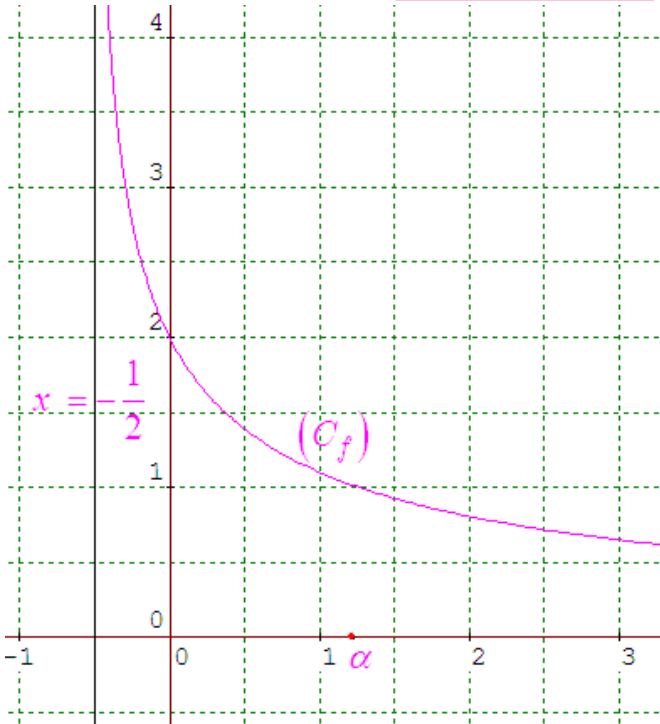
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{1+2x} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2x}{x} \\ &= 0 \times 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{\ln(1+2x)}{x} \\ &= (-\infty) \times (-2) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$$

إن: $x = -\frac{1}{2}$ مقارب ل (C_f)



(II) -1 نضع : $J = [1; \alpha]$

$$\text{و } \varphi(x) = \ln(1+2x) - 1 \text{ معرفة على } [1; 2]$$

أ- φ قابلة للإشتقاق على I

$$(\forall x \in I) \varphi'(x) = \frac{2}{1+2x}$$

$$\text{لدينا : } (\forall x \geq 1) \frac{2}{1+2x} > 0$$

$$\text{لدينا : } (\forall x \geq 1) 1+2x \geq 3 \Leftrightarrow (\forall x \geq 1) \frac{2}{1+2x} \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{إن: } (\forall x \geq 1) 0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$$

ب- لدينا : $f(\alpha) = 1$

$$\text{إن: } \frac{\ln(1+2\alpha)}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \ln(1+2\alpha) = \alpha$$

ومنه : $\varphi(\alpha) = \alpha$

ب- لنبين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1; 2]$

بحيث : $f(\alpha) = 1$

نعتبر الدالة : $k(x) = f(x) - 1$ معرفة على $[1; 2]$

لدينا : f متصلة تناقصية قطعاً على I و $I \subset [1; 2]$

إن: k متصلة تناقصية قطعاً على $[1; 2]$

$$k(1) = \ln(3) - 1 ; k(2) = \frac{\ln(5)}{2} - 1$$

$$\ln(3) > \ln(e) \text{ و } \ln(3) - 1 = \ln(3) - \ln(e)$$

إن: $\ln(3) - 1 > 0$ ومنه : $k(1) > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\ln(5)}{2} - 1 &= \frac{\ln(5) - 2\ln(e)}{2} \\ &= \frac{\ln(5) - \ln(e^2)}{2} \end{aligned}$$

و $5 < e^2$ إذن : $\ln(5) < \ln(e^2)$

ومنه : $k(2) < 0$

بما أن : k متصلة تناقصية قطعاً على $[1; 2]$

$$\text{لدينا : } \left| \frac{1+2u_n}{1+2\alpha} \right| = \left| \frac{2(u_n - \alpha)}{1+2\alpha} + \frac{1-2\alpha}{1+2\alpha} \right|$$

$$\text{و } \left| \frac{2(u_n - \alpha)}{1+2\alpha} + \frac{1-2\alpha}{1+2\alpha} \right| \leq \frac{2}{1+2\alpha} |u_n - \alpha| + \left| \frac{1-2\alpha}{1+2\alpha} \right|$$

$$\text{و } \frac{2}{1+2\alpha} < \frac{2}{3} \quad (\text{لأن } \alpha \in [1; 2])$$

$$\text{و } |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

إذن :

$$\frac{2}{1+2\alpha} |u_n - \alpha| + \left| \frac{1-2\alpha}{1+2\alpha} \right| \leq \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left| \frac{1-2\alpha}{1+2\alpha} \right| \leq \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\text{و منه : } |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\text{حسب برهان التراجع : } (\forall n \geq 0) |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

ج- لنستنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة ثم نحدد نهايتها

$$\text{لدينا : } (\forall n \geq 0) |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\text{إذن : } \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ و } \lim |u_n - \alpha| \leq \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\text{و منه : } \lim |u_n - \alpha| = 0$$

$$\text{إذن : } \lim u_n = \alpha$$

$$\text{إذن : } \lim u_n = \alpha \text{ و } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ متقاربة}$$

التمارين : 8- 9- 10 مثل التمرينين 1- 2 مع الإتيان إلى :

إذا كان : $0 < a < 1$ فإن \log_a تناقصية قطعاً على $]0; +\infty[$

إذا كان : $a > 1$ فإن \log_a تزايدية قطعاً على $]0; +\infty[$

$$\log = \log_{10} \text{ تزايدية قطعاً على }]0; +\infty[$$

تمرين 8

حل في \mathbb{R} :

$$-1 \log_4(x+2) + \log_4(x+3) = \log_4 6$$

$$-2 \log_{\frac{2}{3}}|x+2| + \log_{\frac{2}{3}}|x+5| = \log_{\frac{2}{3}} 6$$

$$-3 \log_3^2 x - 7 \log_3 x + 6 = 0$$

تمرين 9

حل في \mathbb{R} المتراجحات :

$$-1 \log_{\frac{2}{3}}(x-1) \leq 0$$

$$-2 \log_{\frac{3}{5}}(x-1) - \log_{\frac{3}{5}}(2x-4) > 0$$

تمرين 10

حل في \mathbb{R} :

$$\text{بما أن : } (\forall x \geq 1) 0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$$

فإن φ تزايدية على $]1; +\infty[$

و $J \subset]1; +\infty[$

$$\text{إذن : } \varphi(J) = [\varphi(1); \varphi(\alpha)] = [\ln 3; \alpha]$$

ولدينا : $\ln(3) > \ln(e)$ إذن : $\ln(3) > 1$

$$\text{إذن : } [\ln 3; \alpha] \subset [1; \alpha]$$

و منه : $\varphi(J) \subset J$

$$-2 \text{ لدينا : } u_0 = 1, u_{n+1} = \ln(1+2u_n) \quad (\forall n \geq 0)$$

$$\text{إذن : } \varphi(u_n) = u_{n+1}$$

$$\text{أ- لنبين أن : } u_n \in J \quad (\forall n \geq 0)$$

بالتراجع :

$$\text{لدينا : } u_0 = 1 \text{ و } 1 \in J$$

$$\text{إذن : } u_0 \in J$$

نفترض أن : $u_n \in J$

$$\text{إذن : } \varphi(u_n) \in \varphi(J)$$

$$\text{بما أن : } \varphi(u_n) = u_{n+1} \text{ و } \varphi(J) \subset J$$

$$\text{فإن : } u_{n+1} \in J$$

$$\text{حسب برهان التراجع : } (\forall n \geq 0) u_n \in J$$

$$\text{ب- لنبين أن : } |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

بالتراجع :

$$\text{لدينا : } u_0 = 1 \text{ و } \alpha \in [1; 2]$$

$$\text{إذن : } 0 < \alpha - 1 \leq 1$$

$$\text{و منه : } |u_0 - \alpha| \leq 1$$

$$\text{إذن : } |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

$$\text{نفترض أن : } |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\text{لدينا : } \varphi(u_n) = u_{n+1} \text{ و } \varphi(\alpha) = \alpha$$

$$|u_{n+1} - \alpha| = |\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)|$$

$$\text{إذن : } = |\ln(1+2u_n) - \ln(1+2\alpha)|$$

$$= \left| \ln \left(\frac{1+2u_n}{1+2\alpha} \right) \right|$$

$$\text{نعلم أن : } \forall x \in]0; +\infty[\quad \ln x < x$$

$$\text{إذن : } |u_{n+1} - \alpha| \leq \left| \frac{1+2u_n}{1+2\alpha} \right|$$

$$\log(x + 2) + \log(x + 3) = \log 6 \quad \text{-1}$$

$$\log|x + 2| + \log \log_{\frac{2}{3}}|x + 5| = \log 6 \quad \text{-2}$$

$$\log^2 x - 7 \log x + 6 = 0 \quad \text{-3}$$

تمرين 11

حل في \mathbb{R} المتراجحات :

$$\log(x - 1) \leq 0 \quad \text{-1}$$

$$\log(x - 1) - \log(2x - 4) > 0 \quad \text{-2}$$