

الدوال اللوغارتمية

السلسلة 1 (5 تمارين)

التمرين 1 :

الجزء الأول

- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln(x)$
- (1) أدرس تغيرات g على $]0, +\infty[$
 - (2) بين أنه يوجد على α وحيد من $]0, +\infty[$ بحيث $g(\alpha) = 0$
 - (3) أدرس إشارة $g(x)$ على $]0, +\infty[$

الجزء الثاني

- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$
- و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم حدد الفروع اللانهائية ل (C_f)
 - (2) أدرس الوضع النسبي ل (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x$
 - (3) بين أن $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة ثم ضع جدول تغيرات f
 - (4) أنشئ (C_f) (نأخذ $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 1cm$)

الجزء الثالث

- ليكن n من \mathbb{N}^*
- نرمز ب \mathcal{D} الحيز المستوي المحصور بين (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = n$ و $x = 1$

- (1) بين أن مساحة هذا الحيز ب cm^2 هي : $I_n = 2 \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx$
- (2) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب $\int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx$
- (3) استنتج تعبير I_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

التمرين 2 :

الجزء الأول

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = 1 + \ln(1+x)$
و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد (O, \vec{i}, \vec{j}) و (D) المستقيم ذي المعادلة $y = x$.

(1) أ. أدرس تغيرات f

ب. أحسب نهايات f عند محددات D_f

(2) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = f(x) - x$

أ. أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$
 $\lim_{x > -1}$

ب. حدد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ و استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

ج. أدرس تغيرات g ثم ضع جدول تغيراتها

د. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين α و β حيث $\alpha \leq 0$ و $2 \leq \beta \leq 3$

هـ. أدرس إشارة $g(x)$ و استنتج الوضع النسبي ل (C_f) و (D)

الجزء الثاني

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

(1) بين أن : $2 \leq u_n \leq \beta$ لكل n من \mathbb{N}

(2) هل $(u_n)_n$ متقاربة ؟ علل جوابك

التمرين 3 :

الجزء الأول

لتكن U الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $U(x) = \ln(x) + x - 3$

(1) بين أن U تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$

(2) بين أن المعادلة $U(x) = 0$ تقبل حلاً و حيداً α في المجال $]0, +\infty[$ ثم تحقق أن $2 < \alpha < 3$

(3) استنتج إشارة $U(x)$ على $]0, +\infty[$

الجزء الثاني

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2$

وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

$$(1) \text{ أحسب } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$$

$$(2) \text{ أ- بين أن لكل } x \text{ من }]0, +\infty[: f'(x) = \frac{U(x)}{x^2}$$

ب- استنتج تغيرات f على $]0, +\infty[$

الجزء الثالث

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = \ln(x)$

ليكن (C_g) المنحنى الممثل للدالة g في نفس المعلم المتعامد المنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

$$(1) \text{ بين أن أن لكل } x \text{ من }]0, +\infty[: f(x) - g(x) = \frac{2 - \ln x}{x}$$

وحيدة يتم تحديدها .

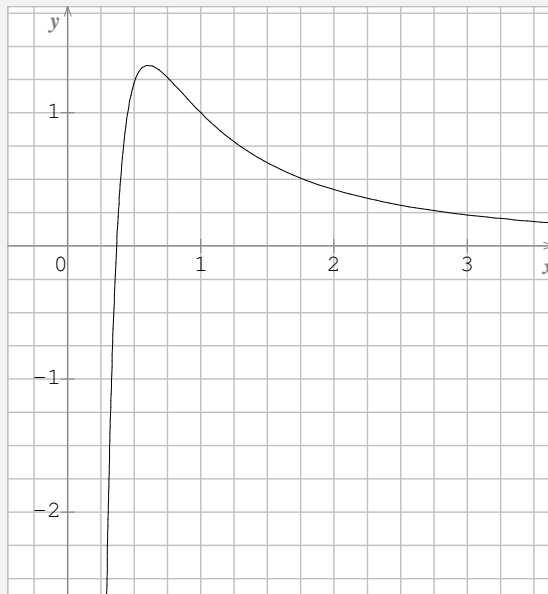
$$(2) \text{ بين أن } H : x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2 \text{ دالة أصلية للدالة } h : x \mapsto \frac{\ln x}{x} \text{ على }]0, +\infty[$$

$$(3) \text{ أحسب التكامل على } I = \int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x} dx \text{ ثم أول مبياتيا هذه النتيجة}$$

التمرين 4 :

لتكن f الدالة المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$. وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد

ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) . (أنظر الشكل أسفله)



- (1) أ- أدرس نهاية f في 0 على اليمين
ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
ج- حدد مقاربات (C_f)
- (2) أ- بين أن : $f'(x) = \frac{-1-2\ln x}{x^3}$ لكل x من $]0, +\infty[$
ب- حل في $]0, +\infty[$ المتراجحة $-1-2\ln x > 0$. و استنتج إشارة $f'(x)$ على $]0, +\infty[$
ج- ضع جدول تغيرات f
- (3) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة يتم تحديد إحداثياتها
ب- استنتج إشارة $f(x)$ على $]0, +\infty[$
- (4) لكل n من \mathbb{N}^* ، نرمز بـ I_n لمساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما
 $x = n$ و $x = \frac{1}{e}$.
أ- بين أن $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$
ب- بين أن $F : x \mapsto \frac{-2 - \ln x}{x}$ دالة أصلية للدالة f على $]0, +\infty[$
ج- أحسب I_n بدلالة n
د- أحسب نهاية (I_n) عند $+\infty$.

التمرين 5 :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$

الجزء الأول

(1) بين أن لكل x من \mathbb{R} : $x^2 - 2x + 2 > 0$

(2) أحسب $f'(x)$ لكل x من \mathbb{R} ثم أدرس تغيرات f

(3) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(4) أدرس الفروع اللانهائية لـ (C_f)

(5) بين أن $(D) : x = 1$ هو محور تماثل لـ (C_f)

(6) مثل مبياتيا (C_f) و $(\Delta) : y = x$

الجزء الثاني

نضع $\varphi(x) = f(x) - x$

(1) أحسب $\varphi'(x)$ لكل x من \mathbb{R} ، ثم استنتج أن φ تناقصية قطعاً على \mathbb{R}

(2) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$

ب- بين أن لكل $x > 0$: $\varphi(x) = x \left[\frac{2 \ln x}{x} + \frac{\ln \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{x} - 1 \right]$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$

ج- بين أن $y = x$ يقطع (C_f) في نقطة وحيدة أفصولها α بحيث $0,3 < \alpha < 0,4$

تصحيح التمرين الأول

الجزء الأول :

(1) لندرس تغيرات الدالة g على المجال $]0, +\infty[$:

لدينا g قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$

ليكن $x \in]0, +\infty[$:

لدينا :

$$g'(x) = (2x^3 - 1 + 2\ln x)'$$

$$= 6x^2 + \frac{2}{x}$$

إذن : $(\forall x \in]0, +\infty[) g'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x}$

و من الواضح أن $(\forall x \in]0, +\infty[) g'(x) > 0$

و منه الدالة g تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$

(2)

✓ لدينا g متصلة على $]0, +\infty[$

✓ و g تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$

✓ ولدينا $0 \in g(]0, +\infty[)$ (لأن $]-\infty, +\infty[=]\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[$)

و منه يوجد α وحيد من $]0, +\infty[$ بحيث $g(\alpha) = 0$

(3) لندرس إشارة $g(x)$:

✓ على المجال $]0, \alpha]$: لدينا $0 < x \leq \alpha$ و نعلم أن g تزايدية

إذن : $g(x) \leq g(\alpha)$

و منه $g(x) \leq 0$ (لأن $g(\alpha) = 0$)

✓ على المجال $[\alpha, +\infty[$: لدينا $x \geq \alpha$ و نعلم أن g تزايدية

إذن : $g(x) \geq g(\alpha)$

و منه $g(x) \geq 0$ (لأن $g(\alpha) = 0$)

الجزء الثاني :

(1)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - \frac{\ln x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - \frac{1}{x^2} \ln x = +\infty\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0 \quad \text{و} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

التأويل الهندسي:

(C_f) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \frac{\ln x}{x^2} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x^2} = 0 \quad \text{لدينا :}$$

التأويل الهندسي:

(C_f) يقبل مقاربا مقاربا مائلا معادلته $y = 2x$ بجوار $+\infty$

(2) ليكن $x \in]0, +\infty[$

$$f(x) - 2x = -\frac{\ln x}{x^2} \quad \text{لدينا :}$$

و لدينا : $x^2 > 0$ إذن إشارة $f(x) - 2x$ هي إشارة $-\ln x$

✓ على المجال $]0, 1]$:

لدينا $\ln x \leq 0$

$$-\ln x \geq 0 \text{ إذن}$$

$$f(x) - 2x \geq 0 \text{ و منه}$$

و بالتالي (C_f) يوجد فوق المستقيم (Δ)

✓ على المجال $[1, +\infty[$:

$$\ln x \geq 0 \text{ لدينا}$$

$$-\ln x \leq 0 \text{ إذن}$$

$$f(x) - 2x \leq 0 \text{ و منه}$$

و بالتالي (C_f) يوجد تحت المستقيم (Δ)

(3) ليكن $x \in]0, +\infty[$:

✓ لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2x - \frac{\ln x}{x^2} \right)' \\ &= 2 - \frac{\ln'(x) \times x^2 - \ln(x) \times (x^2)'}{(x^2)^2} \\ &= 2 - \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{x^4} \\ &= 2 - \frac{x - \ln(x) \times 2x}{x^4} \\ &= 2 - \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} \\ &= 2 - \frac{1 - 2\ln x}{x^3} \\ &= \frac{2x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} \\ &= \frac{g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

$$(\forall x \in]0, +\infty[) \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3} \text{ إذن}$$

✓ لدينا : $x^3 > 0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

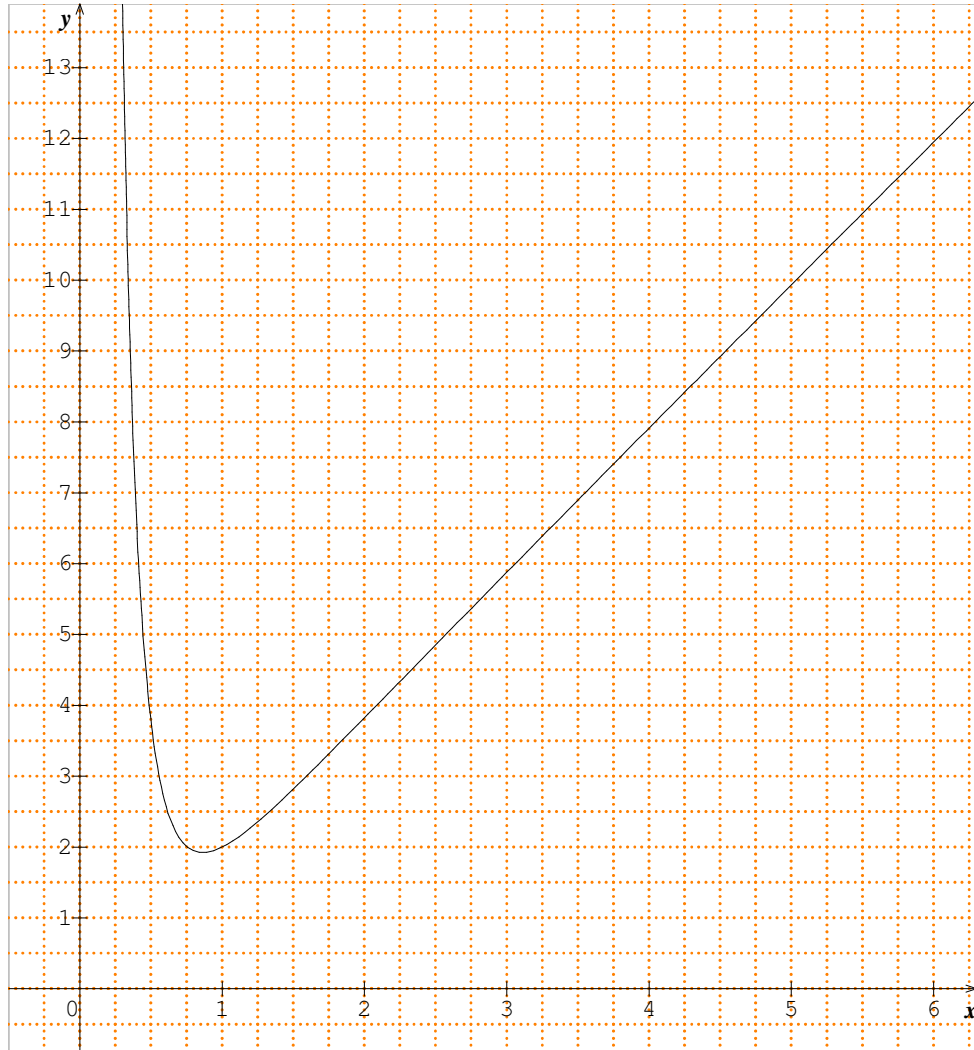
✓ على المجال $]0, \alpha]$: $g(x) \leq 0$ إذن $f'(x) \leq 0$ و منه f تناقصية

و على المجال $[\alpha, +\infty[$: $g(x) \geq 0$ إذن $f'(x) \geq 0$ و منه f تزايدية

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(4)



الجزء الثالث :

(1)

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^n |f(x)| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \\ &= \int_1^n \left| -\frac{\ln x}{x^2} \right| dx \times 2cm^2 \\ &= 2 \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx \cdot cm^2 \end{aligned}$$

(2) لدينا : $\int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx = \int_1^n \ln(x) \times \frac{1}{x^2} dx$

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \quad \swarrow \quad \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{-1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx &= \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^n - \int_1^n -\frac{1}{x^2} dx \\ &= \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^n - \left[\frac{1}{x} \right]_1^n \\ &= \left(\left(\frac{-\ln n}{n} \right) - 0 \right) - \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} I_n &= 2 \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx \cdot cm^2 \\ &= \left(2 - \frac{2}{n} - \frac{\ln n}{n} \right) \cdot cm^2 \end{aligned}$$

✓

✓

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 2 \cdot cm^2$$

لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$

تصحيح التمرين الثاني

الجزء الأول

(1) أ- لندرس تغيرات f على المجال $]-1, +\infty[$:

لدينا f قابلة للإشتقاق على $]-1, +\infty[$

ليكن $x \in]-1, +\infty[$:

$$f'(x) = (1 + \ln(x+1))'$$

$$= 0 + \frac{(x+1)'}{x+1}$$

$$= \frac{1}{x+1}$$

إذن: $(\forall x \in]-1, +\infty[) f'(x) = \frac{1}{x+1}$

لدينا: $x > -1$ إذن $x+1 > 0$ و منه $f'(x) > 0$

و بالتالي: f تزايدية قطعاً على المجال $]-1, +\infty[$.

ب- لدينا:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} 1 + \ln(x+1) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} 1 + \ln(t) = -\infty \quad \checkmark$$

$$\left(\begin{array}{l} t = 1+x \\ x \rightarrow -1^+ \\ t \rightarrow 0^+ \end{array} \right) \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \ln(x+1) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \ln(t) = -\infty : \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \ln(x+1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + \ln(t) = +\infty \quad \checkmark$$

$$\left(\begin{array}{l} t = 1+x \\ x \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow +\infty \end{array} \right) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) = +\infty : \text{لأن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) - x = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} 1 + \ln(x+1) - x = -\infty \quad (2) \text{ أ- لدينا:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} 1 + \ln(x+1) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} -x = 1 \end{array} \right. \quad \text{لأن:}$$

-ب-

$$\left(\begin{array}{l} t = x + 1 \\ x \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow +\infty \end{array} \right) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \quad \checkmark$$

✓

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \ln(x+1) - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + (x+1) \cdot \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1} - \frac{x}{x+1} \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

ج- الدالة g قابلة للإشتقاق على $]-1, +\infty[$

ليكن $x \in]-1, +\infty[$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (f(x) - x)' \\ &= f'(x) - 1 \\ &= \frac{1}{1+x} - 1 \\ &= \frac{1-1-x}{1+x} \\ &= \frac{-x}{x+1} \end{aligned}$$

لدينا : $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

و لدينا : $x + 1 > 0$ إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $-x$

x	-1	0	$+\infty$
$-x$	$+$	0	$-$

جدول تغيرات g :

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$

-د

✓ على المجال $]-1,0]$:

- لدينا g متصلة
 - ولدينا g تزايدية قطعاً
 - ولدينا : $0 \in g(]-1,0]) =]-\infty,1]$
- إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α من المجال $]-1,0]$ ومنه $\alpha \leq 0$

✓ على المجال $[0,+\infty[$:

- لدينا g متصلة
 - ولدينا g تناقصية قطعاً
 - ولدينا : $0 \in g([0,+\infty[) =]-\infty,1]$
- إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً β من المجال $[0,+\infty[$

• لدينا g متصلة على $[2,3]$

• و $g(2) \times g(3) \leq 0$

إذن حسب ميرهنه القيم الوسيطة $2 \leq \beta \leq 3$

✓ خلاصة : المعادلة $g(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين α و β حيث $\alpha \leq 0$ و $2 \leq \beta \leq 3$

-هـ

✓ على المجال $]-1,\alpha]$:

لدينا $-1 < x \leq \alpha$ و g تزايدية

إذن : إذن : $g(x) \leq g(\alpha)$

ومنّه $g(x) \leq 0$ (لأن $g(\alpha) = 0$)

✓ على المجال $[\alpha,\beta]$:

لدينا : $g([\alpha, \beta]) = [0, 1]$

إذن : $\forall x \in [\alpha, \beta] \quad 0 \leq g(x) \leq 1$

و منه : $\forall x \in [\alpha, \beta] \quad 0 \leq g(x)$

✓ على المجال $[\beta, +\infty[$

لدينا $x \geq \beta$ و g تناقصية

إذن : إذن : $g(x) \leq g(\beta)$

و منه $g(x) \leq 0$ (لأن $g(\beta) = 0$)

✚ الوضع النسبي لـ (C_f) و (D)

✓ على كل من المجالين $]-1, \alpha]$ و $[\beta, +\infty[$:

لدينا $g(x) \leq 0$

إذن : $f(x) - x \leq 0$

و منه (C_f) تحت المستقيم (D)

✓ على المجال $[\alpha, \beta]$:

لدينا $g(x) \geq 0$

إذن : $f(x) - x \geq 0$

و منه (C_f) فوق المستقيم (D)

الجزء الثاني :

(1)

✓ من أجل $n = 0$:

لدينا : $u_0 = 2$

إذن : $2 \leq u_0 \leq \beta$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

• نفترض أن : $2 \leq u_n \leq \beta$

• و نبين أن : $2 \leq u_{n+1} \leq \beta$ ؟

حسب الافتراض $2 \leq u_n \leq \beta$ و نعلم أن f تزايدية

إذن : $f(2) \leq f(u_n) \leq f(\beta)$

إذن : $1 + \ln 3 \leq u_{n+1} \leq \beta$

$$2 \leq u_{n+1} \leq \beta \text{ و منه}$$

$$(\quad g(\beta) = 0 \Leftrightarrow f(\beta) - \beta = 0 \quad \text{و} \quad 2 \leq 1 + \ln 3 \quad)$$

$$\Leftrightarrow f(\beta) = \beta$$

• نستنتج أن: $2 \leq u_n \leq \beta$ لكل n من \mathbb{N}

(2) على المجال $[\alpha, \beta]$ لدينا: $f(x) - x \geq 0$
 إذن على المجال $[2, \beta]$: $f(x) - x \geq 0$ (لأن $[2, \beta] \subset [\alpha, \beta]$)
 ونعلم أن $2 \leq u_n \leq \beta$ لكل n من \mathbb{N}
 إذن: $f(u_n) - u_n \geq 0$ لكل n من \mathbb{N}
 إذن: $u_{n+1} - u_n \geq 0$ لكل n من \mathbb{N}
 و منه المتتالية $(u_n)_n$ تزايدية
 ❖ بما أن $(u_n)_n$ تزايدية و مكبورة (بالعدد β) فإن $(u_n)_n$ متقاربة

ملاحظة: لدينا:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \in [2, \beta] \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

- f متصلة على $[2, \beta]$
 - $f([2, \beta]) \subset [2, \beta]$
 - $(u_n)_n$ متقاربة
- إذن نهاية $(u_n)_n$ هي حل للمعادلة $f(x) = x$
- $$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$$
- $$\Leftrightarrow g(x) = 0$$
- $$\Leftrightarrow x = \alpha \text{ و } x = \beta$$
- و بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \beta$ فإن $\alpha \notin [2, \beta]$

تصحيح التمرين الثالث

الجزء الأول :

(1) لدينا الدالة U قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$

ليكن $x \in]0, +\infty[$:

$$U'(x) = (\ln(x) + x - 3)'$$

$$= \frac{1}{x} + 1$$

$$= \frac{1+x}{x}$$

لدينا : $x > 0$ إذن $x > 0$ و $1+x > 0$

$$\frac{1+x}{x} > 0 \text{ إذن}$$

و منه $(\forall x \in]0, +\infty[) U'(x) > 0$

و بالتالي الدالة U تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$

(2)



U متصلة على $]0, +\infty[$ ✓

U تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$ ✓

$$0 \in U(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} U(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) \right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R} \quad \checkmark$$

إذن المعادلة $U(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0, +\infty[$



U متصلة على $[2, 3]$ ✓

$$\begin{cases} U(2) = \ln(2) - 1 < 0 \\ U(3) = \ln 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow U(2) \times U(3) < 0 \quad \checkmark$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة : $2 < \alpha < 3$

(3) لندرس إشارة $U(x)$:

ليكن $x \in]0, +\infty[$:

على المجال $]0, \alpha[$ ✓

لدينا $0 < x \leq \alpha$ و U تزايدية

$$\begin{aligned}
 & \text{إذن } U(x) \leq U(\alpha) \\
 & \text{ومنه } U(x) \leq 0 \quad (\text{لأن } U(\alpha) = 0) \\
 & \quad \checkmark \text{ على المجال } [\alpha, +\infty[\\
 & \text{لدينا } x \geq \alpha \text{ و } U \text{ تزايدية} \\
 & \text{إذن } U(x) \geq U(\alpha) \\
 & \text{ومنه } U(x) \geq 0 \quad (\text{لأن } U(\alpha) = 0)
 \end{aligned}$$

الجزء الثاني:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) (\ln(x) - 2) + 2 = +\infty \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\ln(x) - 2) = -\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن:}$$

$$(2) \text{ أ- ليكن }]0, +\infty[: x \in$$

لدينا:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\left(1 - \frac{1}{x}\right) (\ln(x) - 2) + 2 \right)' \\
 &= \left(1 - \frac{1}{x}\right)' (\ln(x) - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right) (\ln(x) - 2)' + 0 \\
 &= \frac{1}{x^2} (\ln(x) - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} \\
 &= \frac{\ln(x) - 2}{x} + \frac{x - 1}{x^2} \\
 &= \frac{\ln(x) + x - 3}{x^2}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{U(x)}{x^2} :]0, +\infty[\text{ : لكل } x \text{ من}$$

ب- لدينا:

$$\begin{aligned}
 f'(x) = 0 &\Leftrightarrow U(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = \alpha
 \end{aligned}$$

لدينا : $x^2 > 0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $U(x)$

✓ على المجال $]0, \alpha]$: لدينا $U(x) \leq 0$

إذن $f'(x) \leq 0$

ومنه f تناقصية

✓ على المجال $[\alpha, +\infty[$: لدينا $U(x) \geq 0$

إذن $f'(x) \geq 0$

ومنه f تزايدية

الجزء الثالث :

(1) ليكن $x \in]0, +\infty[$

✓ لدينا :

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2 - \ln(x) \\ &= \ln(x) - 2 - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{2}{x} + 2 - \ln(x) \\ &= \frac{2 - \ln(x)}{x} \end{aligned}$$

إذن لكل x من $]0, +\infty[$: $f(x) - g(x) = \frac{2 - \ln x}{x}$

✓ لنحدد تقاطع (C_g) و (C_f) :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \ln x}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = e^2$$

إذن (C_g) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة $A(e^2, 2)$

(2)

✓ الدالة H قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

✓ ليكن $x \in]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} H'(x) &= \left(\frac{1}{2} (\ln(x))^2 \right)', \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times \ln'(x) \times \ln(x) \\ &= \frac{1}{x} \times \ln x \\ &= \frac{\ln x}{x} \end{aligned}$$

إذن: لكل x من $]0, +\infty[$: $H'(x) = h(x)$

ومنه: $H : x \mapsto \frac{1}{2} (\ln x)^2$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على $]0, +\infty[$

(3)

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x} dx \\ &= \int_1^{e^2} \frac{2}{x} dx - \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx \\ &= [2 \ln x]_1^{e^2} - [H(x)]_1^{e^2} \\ &= (4 - 0) - (2 - 0) \\ &= 2 \end{aligned}$$

التأويل الهندسي :

التكامل I يمثل مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و (C_g) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e$ (بوحدتي قياس المساحة)

تصحيح التمرين الرابع

(1) أ-

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1 + \ln x}{x^2} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} \cdot (1 + \ln x) \\ &= -\infty\end{aligned}$$

لأن :

$$\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1 + \ln x) = -\infty \end{cases}$$

ب-

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

لأن :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \end{cases}$$

ج- لدينا $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ إذن (C_f) يقبل مقارب عمودي معادلته $x = 0$

و لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ إذن (C_f) يقبل مقارب أفقي معادلته $y = 0$ بجوار $+\infty$

(2) أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

ليكن $x \in]0, +\infty[$

لدينا :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{1 + \ln x}{x^2} \right)', \\
 &= \frac{(1 + \ln x)' \cdot x^2 - (1 + \ln x) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 + \ln x) \cdot 2x}{x^4} \\
 &= \frac{x - (1 + \ln x) \times 2x}{x^4} \\
 &= \frac{x(1 - 2 - 2 \ln x)}{x^4} \\
 &= \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}
 \end{aligned}$$

إذن : $f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}$ لكل x من $]0, +\infty[$

ب-

✓ لنحل في $]0, +\infty[$ المتراجحة : $-1 - 2 \ln x > 0$

$$-1 - 2 \ln x > 0 \Leftrightarrow -1 > 2 \ln x$$

$$\Leftrightarrow \ln x < \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x < e^{\frac{-1}{2}}$$

$$S = \left] 0, e^{\frac{-1}{2}} \right[\quad \text{إذن :}$$

✓

• على المجال $\left] 0, e^{\frac{-1}{2}} \right[$ لدينا $x^3 > 0$ و $-1 - 2 \ln x > 0$

إذن : $f'(x) > 0$

• على المجال $\left[e^{\frac{-1}{2}}, +\infty \right[$ لدينا $x^3 > 0$ و $-1 - 2 \ln x \leq 0$

إذن : $f'(x) \leq 0$

ج- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$e^{-1/2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$e/2$	0

(3) أ- لنبين أن (C_f) يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة :

لنحل في المجال $]0, +\infty[$ المعادلة $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-1}$$

إذن (C_f) يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة هي $A(e^{-1}, 0)$

ب- على المجال $]0, e^{-1}]$: $f(x) \leq 0$

و على المجال $[e^{-1}, +\infty[$: $f(x) \geq 0$

(4) أ- على المجال $[\frac{1}{e}, 2]$ لدينا $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}e$

$$\text{إذن : } 0 \leq \int_{\frac{1}{e}}^2 f(x) dx \leq \frac{1}{2}e \int_{\frac{1}{e}}^2 dx$$

$$\text{إذن : } 0 \leq I_2 \leq \frac{1}{2}e [x]_{\frac{1}{e}}^2$$

$$\text{إذن : } 0 \leq I_2 \leq \frac{1}{2}e \left(2 - \frac{1}{e}\right)$$

$$\text{ومنه : } 0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$$

ب- لنبين أن $F : x \mapsto \frac{-2 - \ln x}{x}$ دالة أصلية للدالة f على $]0, +\infty[$

✓ لدينا الدالة $F : x \mapsto \frac{-2 - \ln x}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

ليكن $x \in]0, +\infty[$

لدينا :

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \left(\frac{-2 - \ln x}{x} \right)' \\
 &= \frac{(-2 - \ln x) \times x - (-2 - \ln x) \times (x)'}{x^2} \\
 &= \frac{\frac{-1}{x} \times x - (-2 - \ln x)}{x^2} \\
 &= \frac{-1 + 2 + \ln x}{x^2} \\
 &= \frac{1 + \ln x}{x^2}
 \end{aligned}$$

إذن : لكل x من $]0, +\infty[$: $F'(x) = f(x)$

ج- لدينا على المجال $:\left[\frac{1}{e}, n\right]$: $f(x) \geq 0$

إذن :

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_{\frac{1}{e}}^n f(x) dx \\
 &= \left[\frac{-2 - \ln x}{x} \right]_{\frac{1}{e}}^n \\
 &= \left(\frac{-2 - \ln(n)}{n} \right) - (-e) \\
 &= e - \frac{2}{n} - \frac{\ln(n)}{n}
 \end{aligned}$$

د- لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e - \frac{2}{n} - \frac{\ln(n)}{n} = e$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0 \end{array} \right. \text{ لأن :}$$

تصحيح التمرين الخامس

الجزء الأول :

(1) ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$\text{لدينا } x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$$

إذن من الواضح أن لكل x من \mathbb{R} : $x^2 - 2x + 2 > 0$

(2) لدينا الدالة $u : x \mapsto x^2 - 2x + 2$ قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} ولكل x من \mathbb{R} : $u(x) > 0$

إذن الدالة $f = \ln(u)$ قابلة للإشتقاق على \mathbb{R}

ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln(x^2 - 2x + 2))' \\ &= \frac{(x^2 - 2x + 2)'}{x^2 - 2x + 2} \\ &= \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} \end{aligned}$$

لدينا لكل x من \mathbb{R} : $x^2 - 2x + 2 > 0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $2x - 2$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$2x-2$	$-$	0	$+$

إذن على المجال $]-\infty, 1]$: $f'(x) \leq 0$ و على المجال $[1, +\infty[$: $f'(x) \geq 0$

(3)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{لدينا } \checkmark \\ \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 2x + 2) = +\infty \quad \text{إذن :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 2x + 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{لدينا } \checkmark \\ \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 2x + 2) = +\infty \quad \text{إذن :}$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{لدينا } \checkmark$$

$$\begin{aligned}
 & \text{لنحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} : \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

إذن (C_f) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

$$\begin{aligned}
 & \checkmark \text{ لدينا } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \\
 & \text{لنحسب } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} : \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \frac{\ln(-x)}{x} + \frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

إذن (C_f) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$

(5) ليكن $x \in \mathbb{R}$

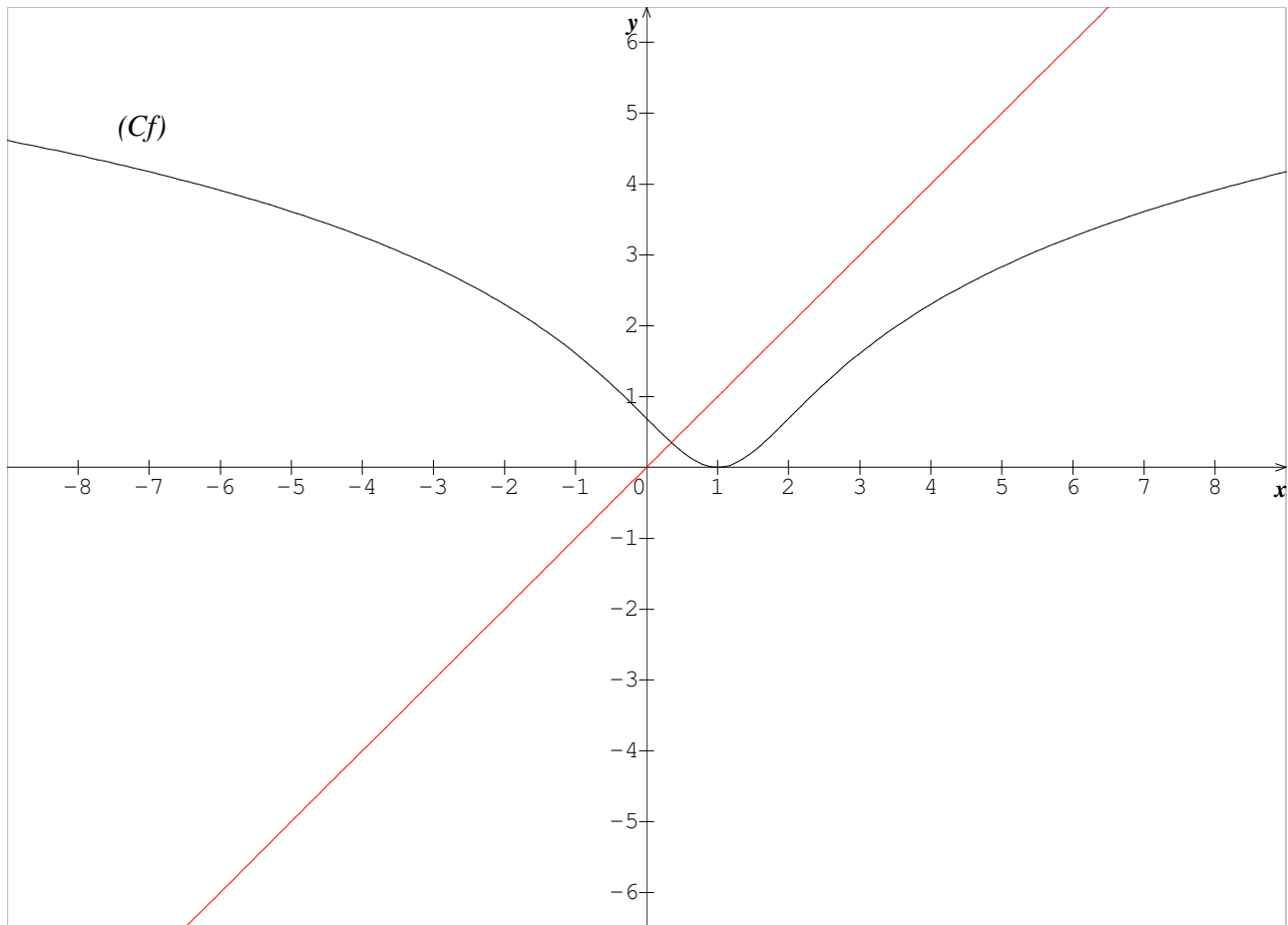
\checkmark لدينا: $2(1) - x = 2 - x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 f(2(1)-x) &= f(2-x) \\
 &= \ln((2-x)^2 - 2(2-x) + 2) \\
 &= \ln(4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 2) \quad \checkmark \\
 &= \ln(x^2 - 2x + 2) \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\forall x \in \mathbb{R}) \quad 2(1)-x \in \mathbb{R} \\ (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(2(1)-x) = f(x) \end{array} \right. : \text{إذن}$$

و منه $(D): x = 1$ هو محور تماثل ل (C_f)

(6)



الجزء الثاني :

(1) ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f'(x) - 1 \\ &= \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} - 1 \\ &= \frac{2x - 2 - x^2 + 2x - 2}{x^2 - 2x + 2} \\ &= \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 2x + 2} \\ &= \frac{-(x - 2)^2}{x^2 - 2x + 2}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & \varphi'(x) \leq 0 \\ \varphi'(x) = 0 & \Leftrightarrow x = 2 \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

إذن : φ تناقصية قطعاً .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 2x + 2) - x = +\infty \quad \text{أ- (2)}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 2x + 2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

ب- ليكن $x \in \mathbb{R}$:

✓

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= f(x) - x \\
 &= \ln(x^2 - 2x + 2) - x \\
 &= \ln\left(x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right) - x \\
 &= \ln(x^2) + \ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) - x \\
 &= 2\ln(x) + \ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) - x \\
 &= x \left(\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1 \right) \\
 \varphi(x) &= x \left[\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1 \right] : \text{إذن : لكل } x > 0 \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1 \right] = -\infty \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

ج-

✓ φ متصلة على \mathbb{R}

✓ φ تناقصية قطعاً على \mathbb{R}

$$0 \in \varphi(\mathbb{R}) = \varphi(]-\infty, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) \right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R} \quad \checkmark$$

إذن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في \mathbb{R}

إذن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلاً وحيداً α في \mathbb{R}

و منه $y = x$: (Δ) يقطع (C_f) في نقطة وحيدة أفصولها α

✓

لدينا :

• φ متصلة على $[0,3;0,4]$

$$\begin{cases} \varphi(0,3) > 0 \\ \varphi(0,4) < 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi(0,3) \times \varphi(0,4) < 0 \quad \bullet$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة : $0,3 < \alpha < 0,4$

つづく