# المجموعة الميكانيكية المتذبذبة ومظاهر الطاقة
# تمارين

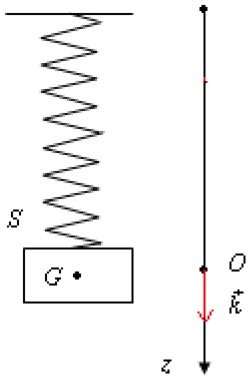
**تمرين 1**

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g=10m/s^2$

نعتبر نواسا مرنا رأسيا مكونا من :

ـ نابض لفاته غير متصلة وكتلته مهملة وصلابته $K=40N/m$ مثبت بحامل .

ـ جسم صلب S كتلته $m=100g$ ومركزه G مثبت بالطرف الحر للنابض




1 ـ أوجد إطالة النابض $\Delta\ell$ عند التوازن بدلالة g,K,m واحسب $\Delta\ell$

2 ـ نزيح الجسم S رأسيا نحو الأسفل ، عن موضع توازنه المنطبق مع المعلم الفضاء Oz ،

بمسافة $Z_m=4cm$ ونحرره بدون سرعة بدئية عند لحظة نختارها كأصل للتواريخ .

2 ـ 1 أوجد باعتمادك على الدراسة التحريكية المعادلة التفاضلية المميزة للحركة واستنتج طبيعتها .

2 ـ 2 أكتب المعادلة الزمنية للحركة $z=f(t)$ .

2 ـ 3 بين أن سرعة الجسم S لحظة مروره أول مرة من موضع توازنه تكتب

$$V_1 = -Z_m\sqrt{\frac{K}{m}}$$

أحسب $V_1$ .

3 ـ ينفصل الجسم عن النابض لحظة مروره من موضع توازنه في منحى $\vec{k}$. أوجد تعبير المعادلة الزمنية $z=f(t)$ لحركة S في المعلم Oz . نختار لحظة انفصال S عن النابض كأصل للتواريخ .

**تمرين 2**

نعتبر مجموعة $(S)$ مكونة من كرة متجانسة شعاعها $R$ وكتلتها $m=100g$ ومن ساق متجانسة لها نفس المتلة وطولها $\ell=10R$ طرفها الأسفل ملحم بالكرة عند النقطة $A$ . المجموعة $(S)$ قابلة للدوران حول محور $(\Delta)$ أفقي وثابت . عزم قصور المجموعة $(S)$ بالنسبة للمحور $(\Delta)$هو $J_\Delta = 10^{-2}\,kg.m^2$ .

نزيح المجموعة عن موضع توازنها المستقر بزاوية $\theta_m = 10°$ ، ثم نحررها بدون سرعة بدئية في اللحظة $t=0$ . نعتبر الاحتكاكات مهملة .

1 ـ اوجد المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة $(S)$ .

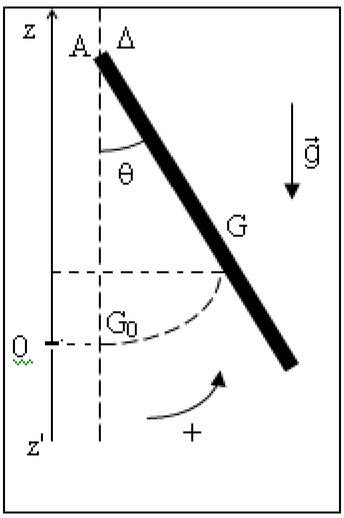
2 ـ حدد طبيعة الحركة ودورها الخاص واكتب المعادلة الزمنية لحركتها .

نعطي : $R=2.5cm,\ g=9.8m/s^2$

3 ـ أعط بدلالة الزمن ، تعبير الطاقة الحركية للمجموعة (S) وحدد قيمتها القصوية.

4 ـ أستنتج بدلالة الزمن ، تعبير طاقة الوضع الثقالية للمجموعة (S).

**تمرين 3**




نعتبر ساقا متجانسة AB كتلتها $M=0,25Kg$ وطولها $L=0,6m$ ومركز قصورها G ، بإمكانها الدوران في مجال الثقالة حول محور Δ أفقي ثابت يمر من طرفها A . نمعلم موضع مركز قصور الساق في كل لحظة بالأفصول الزاوي $\theta\ (t)$ .

ونعطي عزم قصور الساق بالنسبة للمحور Δ

$J_\Delta = \frac{1}{3}ML^2$ و $g=10m/s^2$

نهمل جميع الاحتكاكات خلال هذه الدراسة.

I ـ الدراسة التحريكية.

نزيح الساق عن موضع توازنها بزاوية $\theta_m$ في المنحى الموجب ثم نحررها بدون سرعة بدئية عند اللحظة t=0

1 ـ أوجد تعبير المعادلة التفاضلية لحركة الساق. ما هي طبيعة الحركة ؟

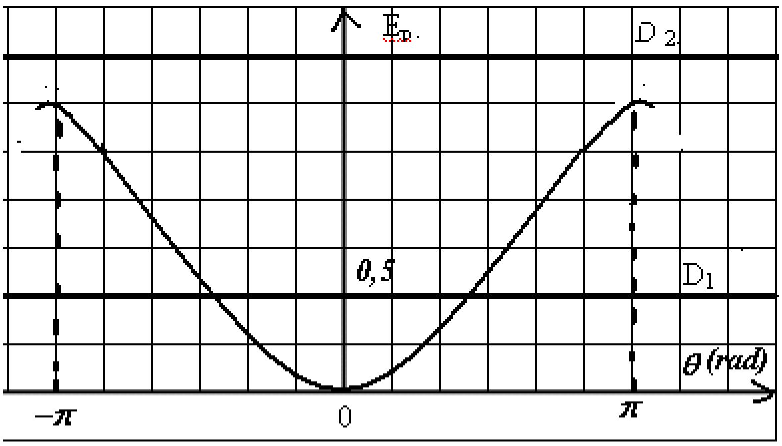
2 ـ أوجد حل للمعادلة التفاضلية في حالة التذبذبات ذات وسع صغير $\theta_m = \frac{\pi}{30} rad$

3 ـ أحسب قيمة الدور $T_0$.

II ـ الدراسة الطاقية

يمثل الشكل جانبه تغيرات طاقة الوضع الثقالية للمجموعة بدلالة الزاوية θ . نعتبر المستوى الأفقي المار من $G_0$ مرجعا لطاقة الوضع الثقالية .

1 ـ بين أن طاقة الوضع للساق يمكن أن نعبر عنها بالعلاقة التالية : $E_p = MgL\frac{(1-\cos\theta)}{2}$




خلال حركة الساق حول المحور Δ يمكن إعطاء قيمتين للطاقة الميكانيكية والمتمثلتين في الشكل بالمستقيمين $D_1$ و $D_2$.

الحالة الأولى: يمثل $D_1$ الطاقة الميكانيكية للمجموعة.

أ ـ عين السرعة الزاوية للساق أثناء مرورها بموضع التوازن في المنحى الموجب.

ب ـ عين من خلال المنحنى موضع أو مواضع الساق التي تكون فيها قيمة الطاقة الحركية $E_C = 0,25J$

الحالة الثانية : يمثل $D_2$ الطاقة الميكانيكية الجديدة للمجموعة . ما هو شكل مسار مركز القصور G للساق ؟ علل الجواب .

أحسب القيمة الدنوية للسرعة الزاوية $\dot{\theta}_1$ للساق وقيمتها القصوية $\dot{\theta}_2$ حينما تدور في المنحى الموجب

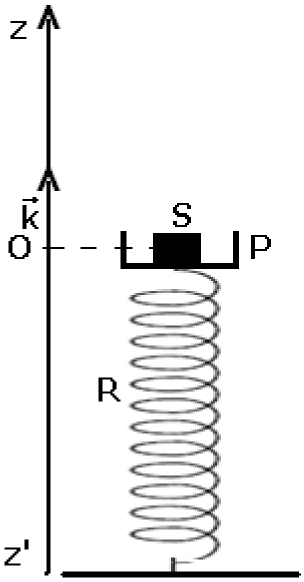
**تمرين 4**

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g = 10 m/s^2$ .

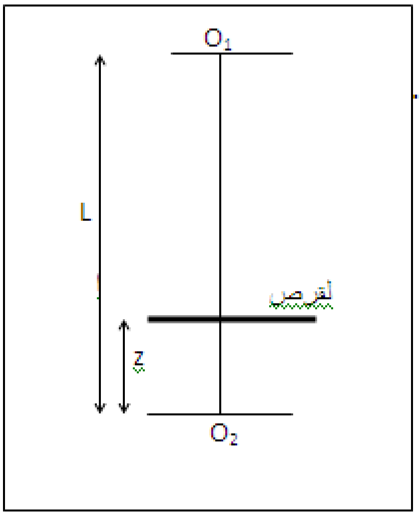
يمثل الشكل جانبه جسم $(S)$ نعتبره كنقطة مادية كتلته $m_1 = 100g$ موضوع على كفة $P$ ذات سمك صغير جدا وكتلتها $m_2 = 200g$ . نثبت عند مركزها $O$ طرف نابض $R$ ذي لفات غير متصلة وكتلة مهملة ، صلابته $k = 300 N/m$ يوجد في وضع رأسي الطرف الأخر مثبت على مستوى أفقي ثابت .

توجد المجموعة في حالة توازن حيث ينتمي مركز قصورها $G$ إلى نفس الخط الأفقي المار من $O$ أصل معلم ثابت $(O,\vec{k})$ .

1 ــ أوجد الانضغاط $|\Delta\ell|$ للنابض بدلالة $m_1$ و $m_2$ و $g$ و $k$ . أحسب $|\Delta\ell|$ .




2 ــ عند اللحظة $t=0$ نقوم بضغط المجموعة $\{S,P\}$ نحو الأسفل ب $0,2m$
وذلك بإعطائها سرعة بدئية $\vec{v}_0$ موجهة نحو الأسفل وقيمته $v_0=1,2m/s$ ،
فنحصل على حركة تذبذبية رأسية .
2 ــ 1 بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على المجموعة $\{S,P\}$ ، اوجد المعادلة التفاضلية لحركة $G$ .
2 ــ 2 تقبل المعادلة التفاضلية حلا لها $z(t)=z_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$ ، استنتج الدور الخاص للحركة وحدد $z_m$ و $\varphi$ .
3 ــ الدراسة الطاقية
نختار أصل المعلم كمرجع لطاقة الوضع الثقالية $(E_{pp}=0)$ وطاقة الوضع المرنة $(E_{pe}=0)$.
3 ــ 1 أوجد تعبير الطاقة الميكانيكية للمجموعة واستنتج المعادلة التفاضلية لحركة المتذبذب .
3 ــ 2 أحسب السرعة $v$ عند مرور المجموعة $\{S,P\}$ من النقطة $O$ لأول مرة .
3 ــ 3 بين أن المجموعة ممكن أن تذبذب بوسع $z_i$ أكبر من $z$ دون أن يغادر الجسم $(S)$ الكفة $(P)$ طالما أن قيمة $z_i$ لم تتجاوز قيمة قصوية $z_{\max}$ . أحسب $z_{\max}$ . ما هو استنتاجك ؟
4 ــ تجريبيا عندما تمر المجموعة من النقطة $O$ مباشرة ينفصل الجسم $(S)$عن الكفة .
نقبل أن $z<0$ الجسم $(S)$ يبقى ملتصقا بالكفة و $z>0$ الجسم $(S)$ ينفصل عن الكفة و $z=0$ الجسم $(S)$ و الكفة $(P)$لهما نفس السرعة $v$ .
نضع $z_{\max}$ الارتفاع القصوي الذي يمكن أن يصل إليه الجسم $(S)$ و $Z_{\max}$ الارتفاع القصوي الذي يمكن أن تصل غليه الكفة والنابض . أوجد تعبيري $z_{\max}$ و $Z_{\max}$ .



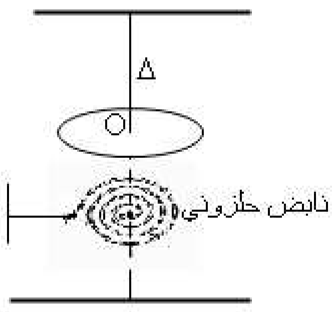

**<u>تمرين 5</u>**
ننجز نواس لي بتعليق قرص عزم قصوره بالنسبة للمحور $\Delta$ $J_\Delta=5.10^{-5}kg.m^2$ بطرف سلك فلزي رأسي طوله $L=0,50m$ . الطرف الآخر للسلك مثبت في النقطة $O_1$ بحيث يكون محوري دوران السلك والقرص منطبقين . يوجد القرص في مستوى أفقي .
1 ــ أوجد طبيعة حركة القرص وأعط تعبير دوره الخاص $T_0$ .
2 ــ احسب ثابتة لي السلك إذا كان $T_0=0,92s$.
3 ــ نثبت الآن طرفي السلك الذي يبقى رأسيا في النقطتين $O_1$ و$O_2$.
يوجد مركز قصور القرص على المسافة z من الطرف السفلي $O_2$ للسلك
نهمل سمك القرص بالنسبة ل z .
أ ــ أوجد طبيعة حركة النواس الجديد وأعط تعبير دوره $T'_0$ بدلالة $T_0$ و $L$ و $z$
علما أن ثابتة لي السلك تتناسب عكسيا مع طوله .
ب ــ أحسب $T'_0$ نعطي $\left(z=\frac{L}{3}\right)$
ج ــ بين أن الدور $T'_0$ يبلغ قيمة قصوية $T'_{\max}$ عندما تأخذ z قيمة معينة $z_m$ احسب $z_m$ واستنتج $T'_{\max}$ .

**تمرين 6**

النابض الحلزوني لساعة مماثل لسلك ثابتة ليه $C=4.10^{-5}N.m.rad^{-1}$ .

يدير هذا النابض رقاصا له شكل عجلة ، عزم قصورها بالنسبة لمحورها الثابت هو$J_{\Delta}=4.10^{-6}kg.m$

نبعد الرقاص عن موضع توازنه حيث يكون النابض مرتخيا بإدارته بزاوية$\alpha=30°$ ونطلقه بدون سرعة بدئية .




1 ـ عين السرعة الزاوية القصوية للرقاص .

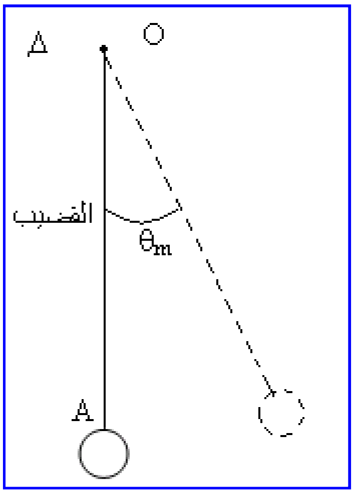
2 ـ أحسب الطاقة الحركية وطاقة الوضع للنواس عندما تأخذ الاستطالة الزاوية θ القيمة $\frac{\theta_m}{2}$

**تمرين 7**

نثبت في أحد قضيب طوله l=40cm جسما صلبا (A) كتلته m=10g بحيث يمكن اعتباره نقطة مادية.

يمكن للقضيب أن يدور في مستوى رأسي بدون احتكاك، حول محور Δ أفقي وثابت يمر من النقطة O .

نهمل كتلة القضيب بالنسبة لكتلة الجسم (A) فنحصل على نواس عزم قصوره بالنسبة للمحور Δ هو $J_{\Delta}=m\ell^2$




1 ـ نزيح القضيب عن موضع توازنه الرأسي بزاوية $\theta_m$ ثم نطلقه بدون سرعة بدئية .

أ ـ بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك , برهن على أن حركة الجسم (A) دائرية جيبية في حالة التذبذبات ذات الوسع الضعيف .

ب ـ أعط تعبير الدور T لهذا النواس . واحسب قيمة T .

2 ـ نعتبر المجموعة {الجسم (A) ـ القضيب، الأرض}.

أ ـ برهن على أن الطاقة الحركية للمجموعة تساوي الطاقة الحركية للجسم (A).

ب ـ أعط تعبير هذه الطاقة بدلالة m, l والسرعة الزاوية $\dot{\theta}$ للقضيب .

ج ـ أوجد تعبر طاقة الوضع الثقالية للمجموعة بدلالة m او θ وg .

θ : زاوية انحراف القضيب مع وضعه الرأسي.

نختار كمرجع لطاقة الوضع المستوى الأفقي المار من (A) في حالة توازن القضيب.

د ـ عين تعبير الطاقة الميكانيكية للمجموعة بدلالة m او gو $\theta_m$و .

3 ـ نعتبر من جديد القضيب في وضعه الرأسي ( التوازن المستقر ), نعطي للجسم (A) سرعة بدئية أفقية $\vec{V}_A$ منظمها 2m/s.

أ ـ بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية أوجد الزاوية القصوية لانحراف القضيب بالنسبة لوضعه الرأسي.

ـ ما السرعة الدنوية التي يجب اعطاؤها للجسم (A) لكي يصل القضيب إلى وضع توازنه غير المستقر .

ـ صف حركة المتذبذب إذا فاقت السرعة $V_A$ قيمة هذه السرعة الدنوية . نعطي : $g=10m/s^2$

R

# المجموعات الميكانيكية المتذبذبة ومظاهر الطاقة
## تصحيح التمارين

**<u>تمرين 1</u>**

1 ــ 1 تحديد $\Delta\ell$ عند التوازن $\vec{P}+\vec{F}=\vec{0}$ الإسقاط على Oz $mg-K\Delta\ell=0$

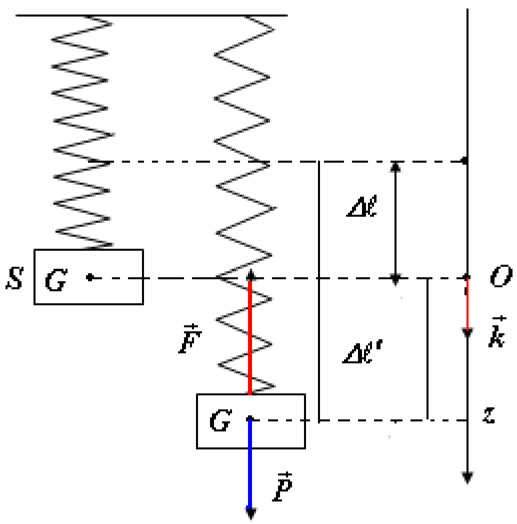
إذن $\Delta\ell=\dfrac{mg}{K}$ تطبيق عددي $\Delta\ell=2{,}5cm$

2 ــ1 تحديد المعادلة التفاضلية

نختار معلم Oz كمعلم غاليلي ونطبق العلاقة الأساسية للديناميك $\vec{P}+\vec{F}'=m\vec{a}$ إسقاط العلاقة على Oz

$mg-K\Delta\ell'=m\ddot{z}$ بحيث أن $\Delta\ell'$ إطالة النابض عند اللحظة t $\Delta\ell'=\Delta\ell+z$

عند التوازن $mg-K\Delta\ell=0$ إذن $-Kz=m\ddot{z}$ أي




أن المعادلة التفاضلية للحركة هي $\ddot{z}+\dfrac{K}{m}z=0$

نضع $\omega_0{}^2=\dfrac{K}{m}$ وتصبح المعادلة $\ddot{z}+\omega_0{}^2z=0$

إذن فالحركة مستقيمية جيبية نبضها الخاص هو :

$$\omega_0=\sqrt{\frac{K}{m}}$$

2 ــ 2 المعادلة الزمنية للحركة

بحيث أن $z=Z_m\cos(\omega_0t+\varphi)$

و عند اللحظة $\omega_0=20rad/s$ و $Z_m=4.10^{-2}m$

t=0 عندنا $z=Z_m$ أي أن $\cos\varphi=1\Rightarrow\varphi=0$

المعادلة الزمنية تكتب على الشكل التالي

$$z=4.10^{-2}\cos(20t)$$

2 ــ 3 نبين أن $V_1=-Z_m\sqrt{\dfrac{K}{m}}$

نحدد السرعة في اللحظة t وذلك باشتقاق z(t) $v=-Z_m\omega_0\sin(\omega_0t+\varphi)$

عند مرور الجسم من موضع توازنه تكون القيمة المطلقة لسرعته قصوية $V_1=\pm Z_m\omega_0$ وبما أنه يمر

لأول مرة فسيكون منحى السرعة عكس المتجهة $\vec{k}$ أي أن $\vec{V}_1=-Z_m\sqrt{\dfrac{K}{m}}\vec{k}$ أي أن $V_1=-Z_m\sqrt{\dfrac{K}{m}}$

تطبيق عددي $V_1=0{,}8m/s$

3

الهواء

تسارع الجسم هو a=g ونأخذ $z_0=0$ والسرعة البدئية $V_0=-V_1$

$$z=5t^2+0{,}8t$$

**تمرين 2**

1 ــ المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة $(S)$

المجموعة $(S)$ قابلة للدوران حول المحور $\Delta$

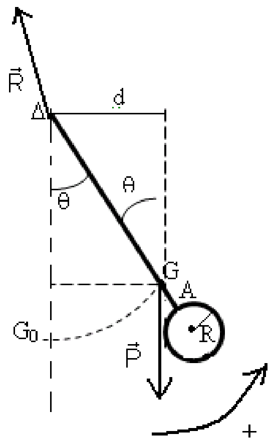
نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على المجموعة $(S)$ في معلم أرضي نعتبره غاليليا .

جرد القوى المطبقة على المجموعة $(S)$ :

$\vec{P}$ و $\vec{R}$ تأثير المحور على الجسم $(S)$ .

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})+\mathcal{M}_\Delta(\vec{R})=J_\Delta.\ddot{\theta}$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{R})=0 \Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{P})=J_\Delta.\ddot{\theta}$$




من خلال الشكل يتبين أن

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})=-2mg.OH$$

$$OH=OG\sin\theta$$

لنحدد $OG$ بتطبيق العلاقة المرجحية على المجموعة $(S)$ :

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{m\overrightarrow{OG_1}+m\overrightarrow{OG_2}}{2m}$ بحيث أن $G_1$ مركز قصور الساق و $G_2$ مركز قصور الكرة ز

ونختار $O$ متطابقة مع المحور $\Delta$ . أي أن $\overrightarrow{OG_1}=5R\vec{i}$ و $\overrightarrow{OG_2}=11R\vec{i}$

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{16R}{2}\vec{i}=8R\vec{i}$ وبالتالي فإن $OG=8R$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})=-2mg.OG\sin\theta \Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{P})=-16mgR\sin\theta$$

وبالتالي : $16mgR\sin\theta+J_\Delta\ddot{\theta}=0 \Rightarrow \ddot{\theta}+\dfrac{16mgR}{J_\Delta}\sin\theta=0$

بما أن $\theta_m=10°$ فإن $\sin\theta\approx\theta$ أي أن $\ddot{\theta}+\dfrac{16mgR}{J_\Delta}\theta=0$

طبيعة حركة المجموعة دورانية جيبية  بحيث المعادلة التفاضلية تقبل حلا لها المعادلة ذات الشكل التالي $\theta(t)=\theta_m\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$.

دورها الخاص يكتب على الشكل التالي : $T_0=2\pi\sqrt{\dfrac{J_\Delta}{16mgR}}=1s$

2 ـ المعادلة الزمنية لحركة المجموعة $(S)$ هي :

$\theta(t)=\theta_m\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$ بحيث أن $\theta_m=10°=\dfrac{\pi}{18}rad$

عند اللحظة $t=0$ لدينا $\theta(0)=\theta_m=\theta_m\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi=1 \Rightarrow \varphi=0$

$$\theta(t)=\frac{\pi}{18}\cos(2\pi t)$$

**5 ـ الطاقة الحركية للمجموعة بدلالة الزمن t**

$$E_C=\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 \Rightarrow E_C=\frac{1}{2}J_\Delta\omega_0^2\theta_m^2\sin^2(2\pi)$$

تكون الطاقة $E_C$ قصوية

$$-1 \le \sin(2\pi t) \le 1 \Rightarrow \sin^2(2\pi t) \le 1$$

$$\frac{1}{2}J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(2\pi t) \le \frac{1}{2}J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2$$

$$E_C \le \frac{1}{2}J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2$$

إذن القيمة القصوية للطاقة الحركية هي : $E_C = \frac{1}{2}J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2$

تطبيق عددي : $E_{Cmax}=6.10^{-3}J$

**6 ـ نستنتج تعبير طاقة الوضع التقالية للمجموعة S :**

بما أن الاحتكاكات مهملة نطبق انحفاظ الطاقة الميكانيكية بين موضعين وهما الموضع التوازن الذي تمر منه المجموعة وتكون هنا السرعة قصوية أي أن الطاقة الميكانيكية قصوية $E_{C\max} = \frac{1}{2}J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2$ ونعتبر أن طاقة الوضع منعدمة أي أن $E_m = \frac{1}{2}J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2$ . و موضع ثاني في اللحظة t أي أن الطاقة الميكانيكية هي $E_m = \frac{1}{2}J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(\omega_0 t) + E_p$

انحفاظ الطاقة الميكانيكية $\frac{1}{2}J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(\omega_0 t) + E_p = \frac{1}{2}J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2$

$$E_p = \frac{1}{2}J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2 \left(1 - \sin^2(\omega_0 t)\right)$$

$$E_p = E_{C\max} \cos^2(2\pi t)$$

**تمرين 3**

I ـ الدراسة التحريكية

1 ــ المعادلة التفاضلية

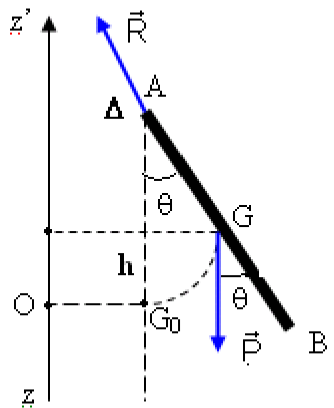
القوى المطبقة على الساق $\vec{P}$ و $\vec{R}$

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على الساق :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$-Mg\frac{L}{2}\sin\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{MgL}{2J_\Delta}\sin\theta = 0$$




حسب شكل المعادلة التفاضلية فهي ليست خطية إذن فحركة الساق حركة تذبذبية

2 ـ المعادلة التفاضلية في حالة تذبذبات ذات وسع صغير حسب قانون التواقت ( لا يتعلق دور حركة النواس بوسع الذبذبات في حالة الذبذبات ذات وسع صغير )

في حالة تذبذبات ذات وسع صغير $\theta_m = \frac{\pi}{10}rad$ نعتبر أن $\sin\theta \approx \theta$

وتصبح المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$\ddot{\theta} + \frac{MgL}{2J_\Delta}\theta = 0$ بما أن $J_\Delta = \frac{1}{3}ML^2$ إذن فالمعادلة التفاضلية هي $\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\theta = 0$

3 ـ حساب قيمة الدور :
حسب المعادلة التفاضلية في حالة التذبذبات ذات وسع صغير فإن حركة النواس حركة تذبذبية جيبية دورها الخاص $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$ تطبيق عددي : $T_0 = 1,26s$

II ـ الدراسة الطاقية
1 ـ نبين العلاقة
نعلم أن طاقة الوضع الثقالية هي : $E_p = Mgz + C$ حسب الحالة المرجعية لطاقة الوضع الثقالية وحسب الشكل جانبه
$E_p = 0$ بالنسبة $z = 0$ إذن $C = 0$ وطاقة الوضع تكتب على الشكل التالي $E_p = Mgz$ بحيث أن

$$z = \frac{L}{2}(1 - \cos\theta)$$

ومنه $$E_p = \frac{MgL(1 - \cos\theta)}{2}$$

2 ـ أ
الحالة الأولى : عند مرور الساق من موضع توازنها . فحسب الشكل $\theta = 0$ و $E_m = E_C = 0,5J$ و $E_p = 0$

$$\frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_m^{\,2} = 0,5 \Rightarrow \dot{\theta}_m = \sqrt{\frac{2 \times 0,5}{J_\Delta}} = 5,77\, rad/s$$

ب ـ موضع الساق عندما تكون $E_C = 0,25J$ أي أن

$E_m = E_p + E_C \Rightarrow E_P = E_m - E_C = 0,5 - 0,25 = 0,25J$ فحسب الشكل $\theta = \pm\frac{\pi}{3} rad$

الحالة الثانية :
عندما تكون $E_c \neq 0 \Rightarrow E_m > E_p$ مهما كانت t أي أن الساق ستدور حول المحور $\Delta$ .

- القيمة القصوية والقيمة الدنوية للسرعة الزاوية $\dot{\theta}$

تكون السرعة الزاوية قصوية عندما تكون الطاقة الحركية $E_C$ قصوية ونرمز لها ب $E_{C\max}$ حيث تكون طاقة الوضع ذنوية وحسب المبيان أن طاقة الوضع الدنوية عندما تكون $\theta = 0$ أي $E_{p\min} = 0$ وفي هذه الحالة $E_m = E_{C\max} = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2_{\max} \Rightarrow \dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{2E_m}{J_\Delta}}$

لدينا $J_\Delta = \frac{1}{3} ML^2 = 3.10^{-2} kg.m^2$ وأن $E_m$ حسب الشكل هي : $E_m = 1,5J$

$$\dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{2E_m}{J_\Delta}} = 10,8 rad/s$$

تكون السرعة الزاوية دنوية عندما تكون الطاقة الحركية دنوية $E_{C\min}$ وتكون طاقة الوضع قصوية وفي هذه الحالة

$$E_m = E_{c\min} + E_{p\max} \Rightarrow E_{C\min} = E_m - E_{p\max}$$

أي أن $$\frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2_{\min} = E_m - E_{p\max} \Rightarrow \dot{\theta}_{\min} = \sqrt{\frac{2(E_m - E_{p\max})}{J_\Delta}}$$

حسب المبيان لدينا :

$E_m = 1,75J$ و $E_{p\max} = 1,5J$ وبالتالي : $\dot{\theta}_{\min} = \sqrt{\dfrac{2\left(E_m - E_{p\max}\right)}{J_\Delta}} = 4,08 rad/s$

**تمرين 4**

نعتبر أن النابض عندما يكون لا مطال ولا مكبوس وتوجد فوقه الكفة $P$ أن طوله هو $\ell_0$ عند وضع الجسم $(S)$ فوق الكفة يصبح طول النابض $\ell_1$ ويعتبر هذا الموضع موضع التوازن المستقر حيث نعتبره أصل المحور الرأسي $(O,\vec{k})$ موجه نحو الأعلى .

1 **__ عند التوازن القوى المطبقة على المجموعة__**

نطبق شرط التوازن في المركز G $\vec{F}$ و $\vec{P}$

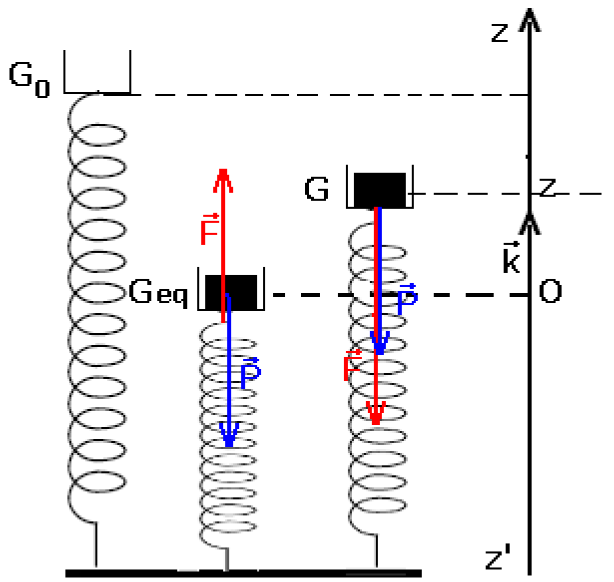
$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$ ونسقط هذه العلاقة على المحور Oz

$$\vec{P} - k\overrightarrow{G_0G_{eq}} = \vec{0}$$

$$-(m_1 + m_2)g + k|\Delta\ell| = 0$$

$$|\Delta\ell| = \frac{(m_1+m_2)g}{K}$$

$$|\Delta\ell| = 1cm$$




2 ــ1 المعادلة التفاضلية للحركة :

نطبق العلاقة الأساسية للديناميك على المجموعة

$$\vec{F} + \vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

$$-k\overrightarrow{G_0G} + \vec{P} = (m_1+m_2)\vec{a} \Rightarrow -k\left(\overrightarrow{G_0G_{eq}} + \overrightarrow{G_{eq}G}\right) + \vec{P} = (m_1+m_2)\vec{a}$$

$$-k\overrightarrow{G_0G_{eq}} - k\overrightarrow{G_{eq}G} + \vec{P} = (m_1+m_2)\vec{a}$$

حسب السؤال السابق لدينا $\vec{P} - k\overrightarrow{G_0G_{eq}} = \vec{0}$

أي أن $-k\overrightarrow{G_{eq}G} = (m_1+m_2)\vec{a}$

نسقط هذه العلاقة المتجهية على Oz : $-kz = (m_1+m_2)\ddot{z}$

إذن المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة هي : $\ddot{z} + \dfrac{k}{m_1+m_2} z = 0$

نستنتج الدور الخاص للحركة : $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{(m_1+m_2)}{k}}$

حساب $T_0$ :

$$T_0 = 0,2s$$

**__2 ــ 2 المعادلة الزمنية لحركة المجموعة__** :

حركة G حركة تذبذبية فمعادلتها الزمنية والتي هي حل للمعادلة التفاضلية السابقة هي :

تحديد الطور عند اللحظة t=0

$$z(0) = Z_m \cos\varphi \Rightarrow 0,2 = Z_m \cos\varphi$$

بالنسبة للسرعة عند اللحظة t=0

$$\dot{z}(t) = -Z_m \frac{2\pi}{T_0}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$t = 0 \Leftrightarrow \dot{z}(0) = -Z_m \frac{2\pi}{T_0}\sin\varphi$$

وحسب المعطيات أن $\dot{z}(0) < 0$ إذن $\dot{z}(0) = -1,2 = -Z_m \frac{2\pi}{T_0}\sin\varphi$

من المعادلتين نستنتج :

$$\begin{cases} 0,2 = Z_m \cos\varphi \\ 1,2 = Z_m 10\pi \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{0,2}{Z_m} = \cos\varphi \\ \dfrac{1,2}{10\pi Z_m} = \sin\varphi \end{cases}$$

$Z_m = 0,203m$ و بالنسبة ل $\cos\varphi = \frac{0,200}{0,203} \Rightarrow \varphi = 10° = \frac{\pi}{18} rad$

$$z(t) = 0,2\cos(10\pi t + \frac{\pi}{18})$$

3 **<u>ــ نختار أصل لمعلم كمرجع لطاقة الوضع الثقالية</u>** :

نحن بصدد اختيار Oz موجه نحو الأعلى إذن $E_p(t) = (m_1 + m_2)gz(t) + C$ بما أنه الحالة المرجعية تم اختيارها في المستوى حيث $z = 0$ فإن $C = 0$

طاقة الوضع المرنة حسب التعريف $E_p = \frac{1}{2}ka^2 + Cte$ حيث $a$ إطالة النابض

بحيث أن $a = |\Delta\ell| - z$ ونختار كحالة مرجعية z=0 إذن $0 = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 + Cte \Rightarrow Cte = -\frac{1}{2}k\Delta\ell^2$

$E_p(t) = \frac{1}{2}k(|\Delta\ell| - z)^2 - \frac{1}{2}k\Delta\ell^2$ عند نشر هذه العلاقة نحصل على $E_p(t) = \frac{1}{2}kz^2 - k|\Delta\ell|z$

إذن الطاقة الميكانيكية للمجموعة هي :

$$E_m(t) = E_p(t) + E_c(t)$$

$E_p(t)$ طاقة الوضع الكلية للمجموعة و $E_c(t)$ الطاقة الحركية للمجموعة .

$$E_m(t) = \frac{1}{2}kz^2 - k|\Delta\ell|z + (m_1 + m_2)gz + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{z}^2$$

نعلم أنه عند التوازن $-(m_1 + m_2)g + k|\Delta\ell| = 0$

إذن $E_m(t) = \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{z}^2$

نستنتج المعادلة التفاضلية للحركة نعلم أن الحركة تتم بدون احتكاك إذن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية

$$\frac{dE_m(t)}{dt}=0 \Rightarrow (m_1+m_2)\ddot{z}+kz=0$$

$$\ddot{z}=-\frac{k}{(m_1+m_2)}z$$

$$\ddot{z}+\frac{k}{(m_1+m_2)}z=0$$

**3 ـ 2 السرعة V التي ستمر بها المجموعة من النقطة O لأول مرة .**

نطبق مبدا انحفاظ الطاقة الميكانيكية عند انتقال الجسم من الموضع ذي الأنسوب $z=_m$ و $z=0$

$$\frac{1}{2}kZ_m{}^2+0=\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2+0$$

يعني أن $V=\sqrt{\frac{kZ_m{}^2}{m_1+m_2}}$ تطبيق عددي V=1,2m/s

نبين أن المجموعة ممكن أن تتذبذب بوسع $z_i>z$ دون أن يغادر الجسم الكفة :

نطبق القانون الثاني الثاني لنيوتن على الجسم S الموضوع على الكفة $\vec{P}+\vec{R}=(m_1+m_2)\vec{a}$

إسقاط العلاقة على Oz $-(m_1+m_2)g+R=(m_1+m_2)\ddot{z}$ حسب الدراسة السابقة

$$\ddot{z}=-\frac{k}{m_1+m_2}z$$

نعوض $\ddot{z}$ في العلاقة

$$-(m_1+m_2)g+R=-(m_1+m_2)\frac{k}{m_1+m_2}$$

$$R=(m_1+m_2)g-kz$$

لكي لايغادر الجسم الكفة يجب أن تكون $R>0$ هذا يعني أن $z_i<\frac{(m_1+m_2)g}{k}$

نضع $Z_m=\frac{(m_1+m_2)g}{k}$ لكي يبقى الجسم في حركة تذبذب حول O يجب $z_i<Z_m \Rightarrow z_i<1cm$

مما يبين أن دراستنا النظرية لايمكن أن توافق ما هو تجريبي وهذا ما سنتطرق إليه في الجزء الثاني

4 ـ تعبيري $Z_{max}$ و $z_{max}$

نطبق انخفاض الطاقة الميكانيكية قبل الانفصال وبعد الانفصال .

بالنسبة للجسم : قبل الانفصال : $E_m=\frac{1}{2}m_1V^2+0$

بعد الانفصال : $E'_m=0+m_1gz_{\max}$

$E_m=E'_m \Rightarrow z_{\max}=\frac{V^2}{2g}$ تطبيق عددي $z_{max}$=7,2cm

بالنسبة للنابض والكفة

مباشرة قبل الإنفصال : $E_m=\frac{1}{2}m_2V^2+0+0$

بعد الانفصال $E'_m = \frac{1}{2}kZ_{\max}{}^2 + m_2 g Z_{\max}$

$$E_m = E'_m \Rightarrow Z_{\max}{}^2 + 2m_2 g Z_{\max} - m_2 V^2 = 0$$

معادلة من الدرجة الثانية $Z_m{}^2 + 4Z_m - 0,29 = 0$

نحتفظ بالحل الموجب $Z_{\max} = 0,07m$

**تمرين 5**

1 ـ طبيعة حركة القرص :

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على القرص له حركة دوران حول محور يجسده السلك

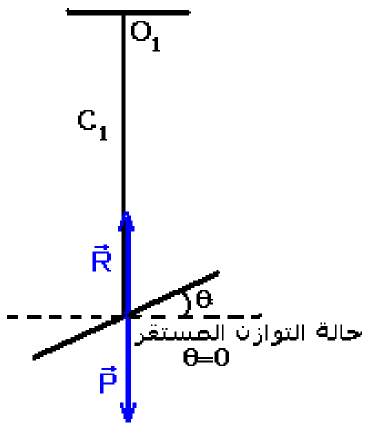
جرد القوى المطبقة على السلك :

$\vec{P}$ وزن القرص ، $\vec{R}$ تأثير السلك على القرص ، مزدوجة اللي المطبقة من طرف السلك .

لدينا $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_C = J_\Delta \ddot{\theta}$ و $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0$ و $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$ أي أن $\mathcal{M}_C = J_\Delta \ddot{\theta} \Rightarrow -C\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$

وبالتالي نحصل على المعادلة التفاضلية التالية : $\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$ خطية حلها جيبي وبالتالي فطبيعة حركة القرص حركة دورانية جيبية .

دورها هو : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$




2 ـ حساب ثابتة اللي بالنسبة ل $T_0 = 0,92s$ :

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{J_\Delta}{C} \Rightarrow C = \frac{4\pi^2 J_\Delta}{T_0^2} = 0,233.10^{-2} N.m.rad^{-1}$$

3 ـ طبيعة حركة النواس الجديد :

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على النواس الجديد :

جرد القوى المطبقة على النواس الجديد :

$\vec{P}$ وزن القرص ، $\vec{R}$ تأثير السلك على القرص ، مزدوجة اللي المطبقة من طرف السلك (1) ومزدوجة اللي المطبقة من طرف السلك (2) .

وبما $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_{C1} + \mathcal{M}_{C_2} = J_\Delta \ddot{\theta}$ أن $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0$ و

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$ فإن $\mathcal{M}_{C1} + \mathcal{M}_{C_2} = J_\Delta \ddot{\theta}$

بحيث أن $\mathcal{M}_{C1} = -C_1\theta$ و $\mathcal{M}_{C2} = -C_2.\theta$ .

حسب المعطيات لدينا أن $C_1$ تتناسب عكسيا مع طول السلك ، أي أن $C_1 = \frac{K}{L-z}$ و $C_2 = \frac{K}{z}$ أي أن

ثابتة اللي للسلك الذي طوله $L$ كذلك تتناسب عكسيا مع الطول : $C = \frac{K}{L}$

$-C_1\theta - C_2\theta = J_\Delta \ddot{\theta} \Rightarrow -(C_1 + C_2)\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$ نعوض $C_1$ و $C_2$ في المعادلة $-K\left(\frac{1}{L-z} + \frac{1}{z}\right)\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$

لدينا كذلك : $K = C.L$ أي

$$-C.L\left(\frac{1}{L-z} + \frac{1}{z}\right)\theta = J_\Delta \ddot{\theta} \Rightarrow -\frac{L^2}{z(L-z)}C = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{L^2.C}{z(L-z).J_\Delta}\theta = 0$$

ب ـ تعبير الدور $T'_0$ :

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{z(L-z).J_\Delta}{L^2.C}} = \frac{T_0}{L}\sqrt{z(L-z)}$$

حساب $T_0'$ في حالة $z=\frac{L}{3}$

$$T_0' = \frac{T_0}{L}\sqrt{\frac{L}{3}\left(\frac{2L}{3}\right)} = \frac{T_0}{3}\sqrt{2} = 0,43s$$

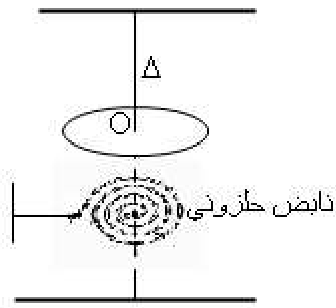
ج ـ لنبين أن $T_0'$ تأخذ قيمة قصوية بالنسبة ل $z = z_{max}$

نحسب المشتقة الأولى ل $T_0'$ :

$\frac{dT_0'}{dt} = \frac{T_0(L-2z)}{2L\sqrt{z(L-z)}} = 0 \Rightarrow L-2z=0$ وبالتالي فإن $T_0'$ تأخذ قيمة قصوية بالنسبة ل $z=\frac{L}{2}$

في هذه الحالة تكون $T'_{0max} = \frac{T_0}{2} = 0,46s$

**تمرين6**




1 ـ السرعة الزاوية القصوية للرقاص :

طاقة الوضع للي بالنسبة للنابض الحلزوني $E_p = \frac{1}{2}C\theta^2 + Cte$ نختار كحالة مرجعية الحالة التي يكون فيها النابض غير مشوه ، عند موضع التوازن $\theta = 0$ يكون النابض غير مشوه $E_p = 0$ أي أن $Cte = 0$ و

$$E_p = \frac{1}{2}C\theta^2$$

نعلم أن الرقاص يأخذ سرعة قصوية عند مروره بموضع توازنه . كما أنه عند حركة النواس هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية أي : $E_m(0) = E_m(equilibre)$ بحيث أن $E_m(0) = E_p(0) + E_C(0)$ الطاقة الميكانيكية عند انطلاق الرقاص بدون سرعة بدئية $E_C(0) = 0$ و $E_p(0) = \frac{1}{2}C\theta_m^2$ يعني أن

$$E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2 \quad (1)$$

عند مروره من موضع توازنه $E_p = 0$ و $E_C = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2_{max}$ يعني أن $E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_{max}^2$ (2)

من العلاقتين (1) و(2) نستنتج $\frac{1}{2}C\theta_m^2 = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2_{max} \Rightarrow \dot{\theta}_{max} = \theta_m\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$

تطبيق عددي : $\dot{\theta}_{max} = 1,66rad/s$

2 ـ حساب طاقة الوضع والطاقة الحركية للنواس

نطبق انحفاظ الطاقة الميكانيكية بين موضعين مثلا عند مروره من موضع التوازن وموضع في اللحظة

$$\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_{max}{}^2=\frac{1}{2}C\theta^2+E_C(t)\Rightarrow E_C(t)=\frac{1}{2}C\theta_m{}^2-\frac{C\theta_m{}^2}{8}$$

$$E_C(t)=\frac{3C\theta_m{}^2}{8}$$

حساب طاقة الوضع : $E_p=\frac{1}{2}C\theta^2\Rightarrow E_p=\frac{C\theta_m{}^2}{8}$

تطبيق عددي : $E_C=0,042.10^{-4}\,J$ و $E_p=0,014.10^{-4}\,J$

**تمرين 7**

**1 ـ أ ـ نطبق العلاقة الأساسية على الجسم A :** $\sum\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i)=J_\Delta\ddot{\theta}$

جرد القوى المطبقة على الجسم A :

$\vec{P}$ وزن الجسم A

$\vec{T}$ توتر القضيب

$\vec{R}$ تأثير المحور على القضيب .

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})+\mathcal{M}_\Delta(\vec{R})+\mathcal{M}_\Delta(\vec{T})=J_\Delta\ddot{\theta}$ وبما أن خط تأثير القوة $\vec{T}$ والقوة $\vec{R}$ يتقاطعا مع المحور Δ فإن عزمهما منعدم . أي أن $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})=J_\Delta\ddot{\theta}$

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})=-mgd$ بحيث أن $d=l\sin\theta$ إذن

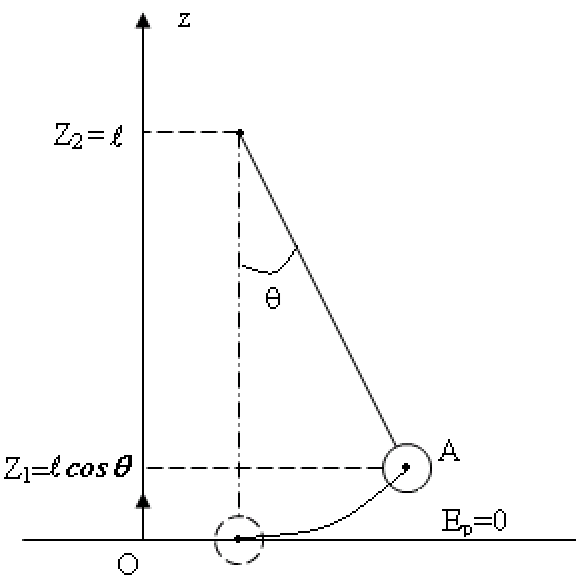
$$-mg\ell\sin\theta=J_\Delta\ddot{\theta}$$

ونستنتج المعادلة التفاضلية لحركة الجسم A

$\ddot{\theta}+\frac{mg\ell}{J_\Delta}\sin\theta=0$ في حالة التذبذبات ذات الوسع صغير في هذه الحالة الدور الخاص لا يتعلق بوسع الذبذبات : $\sin\theta\approx\theta$

وتصبح المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$$\ddot{\theta}+\frac{mg\ell}{m\ell^2}\theta=0\Rightarrow\ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}\theta=0$$




يتبين من المعادلة التفاضلية أن حركة A حركة دائرية جيبية .

ب ـ تعبير الدور $T_0$ لهذا النواس : $T_0=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ حساب الدور T : $T_0=0,4\pi s=1,26s$

2 ـ أ البرهان على أن الطاقة الحركية للمجموعة تساوي الطاقة الحركية للقضيب :

$$E_C=E_C(tige)+E_C(A)+E_C(terre)$$

$$E_C=\frac{1}{2}J'_\Delta\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2+0$$

نعلم أن كتلة القضيب مهملة بالنسبة لكتلة الجسم إذن فعزم قصوره منعدم في هذه الحالة لأن كتلة المجموعة مركزة في الجسم A إذن الطاقة الحركية للمجموعة : $E_C=E_C(A)$

ب ـ تعبير الطاقة الحركية للمجموعة : $E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 \Rightarrow E_C = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\theta}^2$

**ج ـ طاقة الوضع الثقالية للمجموعة :**

حسب تعريف طاقة الوضع الثقالية : $E_p = mgz + cte$ نختار Oz موجه نحو الأعلى أي أن

$$z = 0 \Rightarrow E_p = 0 \Rightarrow cte = 0$$

$E_p = mg\ell(1 - \cos\theta)$ في حالة التذبذبات ذات الوسع صغير فإن $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ وفي هذه الحالة تكون طاقة الوضع على الشكل التالي :

$$E_p = mg\ell \frac{\theta^2}{2}$$

د ـ الطاقة الميكانيكية للمجموعة :

$$E_m = E_c + E_p$$

بما أننا بصدد حركة تذبذبية جيبية فإن معادلتها الزمنية تكتب على الشكل التالي

$$\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \phi\right)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{2\pi}{T_0} \theta_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \phi\right)$$

نعوض في المعادلة للطاقة الميكانيكية :

$$E_m = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mgl\theta^2$$

$$= \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \theta_m{}^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \phi\right) + \frac{1}{2} mgl\theta_m{}^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \phi\right)$$

حسب المعادلة التفاضلية عندنا $\omega_0{}^2 = \frac{g}{l}$

$$E_m = \frac{1}{2} ml^2 \frac{g}{l} \theta_m{}^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \phi\right) + \frac{1}{2} mgl\theta_m{}^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \phi\right)$$

$$= \frac{1}{2} ml\theta_m{}^2 \left(\sin^2(\frac{2\pi}{T_0} t + \phi) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \phi\right)\right)$$

$$E_m = \frac{1}{2} ml\theta_m{}^2$$

نستنتج أن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية نظرا لأن $E_m = Cte$

3 ـ 1 ـ **نطبق مبرهنة الطاقة الحركية بين الوضع المستقر والوضع التي تكون فيه الزاوية قصوية $\alpha_m$**

$$-\frac{1}{2}mv_A{}^2 = -mgl(1-\cos\alpha_m)$$

$$mv_A{}^2 = 2mgl - 2mgl\cos\alpha_m$$

$$\cos\alpha_m = 1 - \frac{v_A{}^2}{2gl}$$

تطبيق عددي نجد $\alpha_m = \frac{\pi}{3}$

**أ ــ السرعة الدنوية التي يجب إعطاؤها للجسم A لكي يصل القضيب إلى وضع توازنه غير المستقر :**

وضع التوازن غير المستقر : $\alpha_m = \pi$ أي أن $\cos\alpha_m = -1$ يعني أن $v'_A = 2\sqrt{gl}$

تطبيق عددي $v'_A = 4m/s$

ب ــ حركة القضيب ستكون في هذه الحالة حركة دورا نية حول المحور Δ أي مسار الكرة مسار دائري مركزه النقطة التي يمر منها المحور Δ .