

المجموعة الميكانيكية المتذبذبة ومظاهر الطاقة تمارين

تمرين 1

نعمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g=10\text{m/s}^2$
نعتبر نواسا مرنا رأسيا مكونا من :

– نابض لفاته غير متصله وكتلته مهملة وصلابته $K=40\text{N/m}$ مثبت بحامل .

– جسم صلب S كتلته $m=100\text{g}$ ومركزه G مثبت بالطرف الحر للنابض

1 – أوجد إطالة النابض Δl عند التوازن بدلالة g, K, m واحسب Δl

2 – نزيح الجسم S رأسيا نحو الأسفل ، عن موضع توازنه المنطبق مع المعلم الفضاء Oz ،

بمسافة $Z_m=4\text{cm}$ ونحرره بدون سرعة بدئية عند لحظة نختارها كأصل للتواريخ .

2 – 1 أوجد باعتمادك على الدراسة التحريكية المعادلة التفاضلية المميزة للحركة

واستنتج طبيعتها .

2 – 2 أكتب المعادلة الزمنية للحركة $z=f(t)$.

2 – 3 بين أن سرعة الجسم S لحظة مروره أول مرة من موضع توازنه تكتب

$$V_1 = -Z_m \sqrt{\frac{K}{m}}$$

أحسب V_1 .

3 – ينفصل الجسم عن النابض لحظة مروره من موضع توازنه في منحنى \vec{k} . أوجد تعبير المعادلة الزمنية

$z=f(t)$ لحركة S في المعلم Oz . نختار لحظة انفصال S عن النابض كأصل للتواريخ .

تمرين 2

نعتبر مجموعة (S) مكونة من كرة متجانسة شعاعها R وكتلتها $m=100\text{g}$ ومن ساق متجانسة لها

نفس المتلة وطولها $\ell=10R$ طرفها الأسفل ملحم بالكرة عند النقطة A . المجموعة (S) قابلة

للدوران حول محور (Δ) أفقي وثابت . عزم قصور المجموعة (S) بالنسبة للمحور (Δ) هو

$$J_{\Delta} = 10^{-2} \text{kg.m}^2$$

نزيح المجموعة عن موضع توازنها المستقر بزاوية $\theta_m = 10^\circ$ ، ثم نحررها بدون سرعة بدئية في اللحظة

$t=0$. نعتبر الاحتكاكات مهملة .

1 – أوجد المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة (S) .

2 – حدد طبيعة الحركة ودورها الخاص واكتب المعادلة الزمنية لحركتها .

نعطي : $R=2.5\text{cm}$ ، $g=9.8\text{m/s}^2$

3 – أعط بدلالة الزمن ، تعبير الطاقة الحركية للمجموعة (S) وحدد قيمتها

القصوية.

4 – أستنتج بدلالة الزمن ، تعبير طاقة الوضع الثقالية للمجموعة (S).

تمرين 3

نعتبر ساقا متجانسة AB كتلتها $M=0,25\text{Kg}$ وطولها $L=0,6\text{m}$ ومركز قصورها

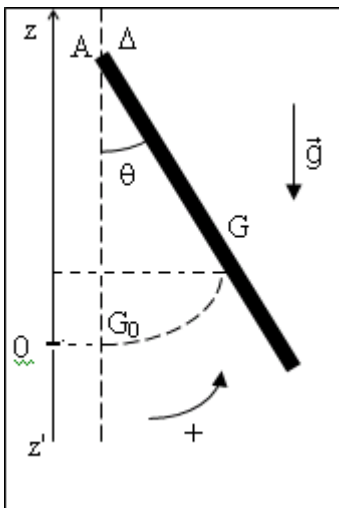
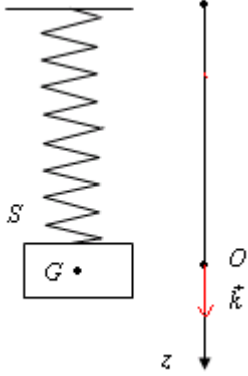
G ، بإمكانها الدوران في مجال الثقالة حول محور Δ أفقي ثابت يمر من طرفها

A . نعلم موضع مركز قصور الساق في كل لحظة بالأفصول الزاوي $\theta(t)$.

ونعطي عزم قصور الساق بالنسبة للمحور Δ

$$J_{\Delta} = \frac{1}{3} ML^2 \text{ و } g = 10\text{m/s}^2$$

نعمل جميع الاحتكاكات خلال هذه الدراسة.



I – الدراسة التحريكية.

نزوح الساق عن موضع توازنها بزاوية θ_m في المنحى الموجب ثم نحررها بدون سرعة بدئية عند اللحظة $t=0$
 1 – أوجد تعبير المعادلة التفاضلية لحركة الساق. ما هي طبيعة الحركة ؟

2 – أوجد حل للمعادلة التفاضلية في حالة التذبذبات ذات وسع

$$\theta_m = \frac{\pi}{30} \text{ rad صغير}$$

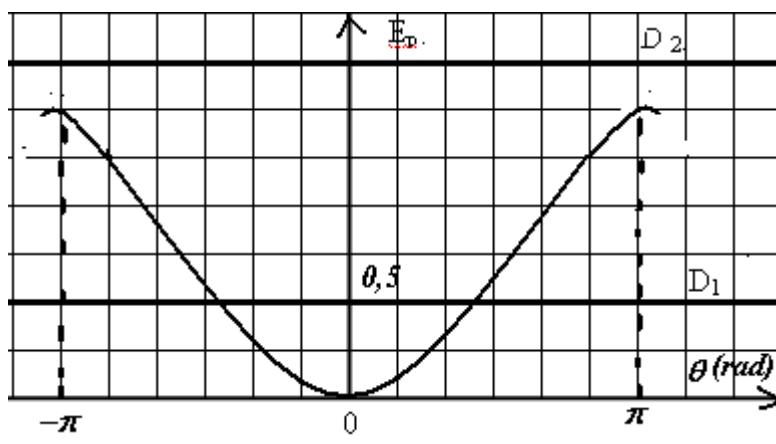
3 – أحسب قيمة الدور T_0 .

II – الدراسة الطاقية

يمثل الشكل جانبه تغيرات طاقة الوضع الثقالية للمجموعة

بدلالة الزاوية θ . نعتبر المستوى الأفقي المار من G_0 مرجعا لطاقة الوضع الثقالية .

1 – بين أن طاقة الوضع للساق يمكن أن نعبر عنها بالعلاقة التالية : $E_p = MgL \frac{(1 - \cos \theta)}{2}$



خلال حركة الساق حول المحور Δ يمكن إعطاء قيمتين للطاقة الميكانيكية والمتمثلتين في الشكل بالمستقيمين D_1 و D_2 .

الحالة الأولى: يمثل D_1 الطاقة الميكانيكية للمجموعة.

أ – عين السرعة الزاوية للساق أثناء مرورها بموضع التوازن في المنحى الموجب.

ب – عين من خلال المنحى موضع أو مواضع الساق التي تكون فيها قيمة الطاقة

الحركية $E_c = 0, 25 \text{ J}$

الحالة الثانية : يمثل D_2 الطاقة الميكانيكية الجديدة للمجموعة . ما هو شكل مسار مركز القصور G للساق ؟ علل الجواب .

أحسب القيمة الدنوية للسرعة الزاوية θ_1 للساق وقيمتها القصوية θ_2 حينما تدور في المنحى الموجب

تمرين 4

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g = 10 \text{ m/s}^2$.

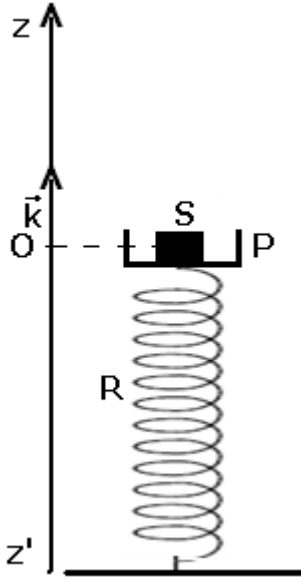
يمثل الشكل جانبه جسم (S) نعتبره كنقطة مادية كتلته $m_1 = 100 \text{ g}$ موضوع على كفة P ذات سمك

صغير جدا وكتلتها $m_2 = 200 \text{ g}$. نثبت عند مركزها O طرف نابض R ذي لفات غير متصلة وكتلة مهملة

، صلابته $k = 300 \text{ N/m}$ يوجد في وضع رأسي الطرف الآخر مثبت على مستوى أفقي ثابت .

توجد المجموعة في حالة توازن حيث ينتمي مركز قصورها G إلى نفس الخط الأفقي المار من O أصل

معلم ثابت (O, \vec{k}) .



- 1 - أوجد الانضغاط $|\Delta l|$ للناض ببدلالة m_1 و m_2 و g و k . أحسب $|\Delta l|$.
- 2 - عند اللحظة $t = 0$ نقوم بضغط المجموعة $\{S, P\}$ نحو الأسفل ب $0,2m$ وذلك بإعطائها سرعة بدئية \vec{v}_0 موجهة نحو الأسفل وقيمتها $v_0 = 1,2m/s$ ، فنحصل على حركة تذبذبية رأسية.
- 2 - بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على المجموعة $\{S, P\}$ ، أوجد المعادلة التفاضلية لحركة G .

2 - 2 تقبل المعادلة التفاضلية حلا لها $z(t) = z_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ ، استنتج الدور الخاص للحركة وحدد z_m و φ .

3 - الدراسة الطاقية
نختار أصل المعلم كمرجع لطاقة الوضع الثقالية ($E_{pp} = 0$) وطاقة الوضع المرنة ($E_{pe} = 0$).

3 - 1 أوجد تعبير الطاقة الميكانيكية للمجموعة واستنتج المعادلة التفاضلية لحركة المتذبذب.

3 - 2 أحسب السرعة v عند مرور المجموعة $\{S, P\}$ من النقطة O لأول مرة.

- 3 - 3 بين أن المجموعة ممكن أن تذبذب بوسع z_i أكبر من z دون أن يغادر الجسم (S) الكفة (P) طالما أن قيمة z_i لم تتجاوز قيمة قصوية z_{\max} . أحسب z_{\max} . ما هو استنتاجك؟
- 4 - تجريبيا عندما تمر المجموعة من النقطة O مباشرة ينفصل الجسم (S) عن الكفة. نقبل أن $z < 0$ الجسم (S) يبقى ملتصقا بالكفة و $z > 0$ الجسم (S) ينفصل عن الكفة و $z = 0$ الجسم (S) و الكفة (P) لهما نفس السرعة v .

نضع z_{\max} الارتفاع القصوي الذي يمكن أن يصل إليه الجسم (S) و Z_{\max} الارتفاع القصوي الذي يمكن أن تصل عليه الكفة والناض. أوجد تعبير z_{\max} و Z_{\max} .

تمرين 5

ننجز نواس لي بتعليق قرص عزم قصوره بالنسبة للمحور Δ بطرف سلك فلزي رأسي طوله $L = 0,50m$. الطرف الآخر للسلك مثبت في النقطة O_1 بحيث يكون محوري دوران السلك والقرص منطبقين. يوجد القرص في مستوى أفقي.

1 - أوجد طبيعة حركة القرص وأعط تعبير دوره الخاص T_0 .

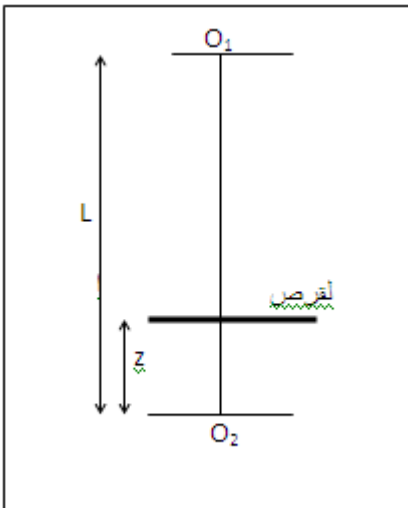
2 - احسب ثابتة لي السلك إذا كان $T_0 = 0,92s$.

3 - نثبت الآن طرفي السلك الذي يبقى رأسي في النقطتين O_1 و O_2 . يوجد مركز قصور القرص على المسافة z من الطرف السفلي O_2 للسلك نهمل سمك القرص بالنسبة ل z .

أ - أوجد طبيعة حركة النواس الجديد وأعط تعبير دوره T'_0 بدلالة L و T_0 و z . علما أن ثابتة لي السلك تتناسب عكسيا مع طوله.

ب - أحسب T'_0 نعطي $\left(z = \frac{L}{3}\right)$

ج - بين أن الدور T'_0 يبلغ قيمة قصوية T'_{\max} عندما نأخذ z قيمة معينة z_m احسب z_m واستنتج T'_{\max} .



تمرين 6

الناض الحزوني لساعة مماثل لسلك ثابتة ليه $C=4.10^{-5}N.m.rad^{-1}$.
 يدبر هذا الناض رفاصا له شكل عجلة ، عزم قصورها بالنسبة لمحورها
 الثابت هو $J_{\Delta}=4.10^{-6}kg.m$

نبعد الرقاص عن موضع توازنه حيث يكون الناض مرتخيا بإدارته بزاوية $\alpha=30^{\circ}$
 ونطلقه بدون سرعة بدئية .

1 - عين السرعة الزاوية القصوية للرقاص .

2 - أحسب الطاقة الحركية وطاقة الوضع للنواس عندما تأخذ الاستطالة

$$\frac{\theta_m}{2}$$

تمرين 7

نثبت في أحد قضيب طوله $l=40cm$ جسما صلبا (A) كتلته $m=10g$ بحيث يمكن اعتباره نقطة
 مادية.

يمكن للقضيب أن يدور في مستوى رأسي بدون احتكاك، حول محور Δ أفقي وثابت يمر من
 النقطة O .

نهمل كتلة القضيب بالنسبة لكتلة الجسم (A) فنحصل على نواس عزم قصوره بالنسبة للمحور

$$\Delta \text{ هو } J_{\Delta} = ml^2$$

1 - نزيح القضيب عن موضع توازنه الرأسي بزاوية θ_m ثم نطلقه بدون
 سرعة بدئية .

أ - بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك ، برهن على أن حركة الجسم (A)
 دائرية جيبية في حالة التذبذبات ذات الوسع الضعيف .

ب - أعط تعبير الدور T لهذا النواس . واحسب قيمة T .

2 - نعتبر المجموعة {الجسم (A) - القضيب، الأرض}.

أ - برهن على أن الطاقة الحركية للمجموعة تساوي الطاقة الحركية
 للجسم (A).

ب - أعط تعبير هذه الطاقة بدلالة l, m والسرعة الزاوية θ للقضيب .

ج - أوجد تعبير طاقة الوضع الثقالية للمجموعة بدلالة m و θ و g .

θ : زاوية انحراف القضيب مع وضعه الرأسي.

نختار كمرجع لطاقة الوضع المستوي الأفقي المار من (A) في حالة توازن القضيب.

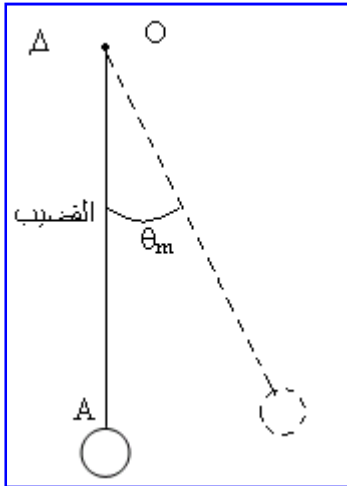
د - عين تعبير الطاقة الميكانيكية للمجموعة بدلالة m و g و θ_m .

3 - نعتبر من جديد القضيب في وضعه الرأسي (التوازن المستقر)، نعطي للجسم (A) سرعة
 بدئية أفقية \vec{V}_A منظمها $2m/s$.

أ - بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية أوجد الزاوية القصوية لانحراف القضيب بالنسبة لوضعه
 الرأسي.

ب - ما السرعة الدنوية التي يجب اعطاؤها للجسم (A) لكي يصل القضيب إلى وضع توازنه غير
 المستقر .

ج - صف حركة المتذبذب إذا فاقت السرعة V_A قيمة هذه السرعة الدنوية . نعطي : $g=10m/s^2$



المجموعات الميكانيكية المتذبذبة ومظاهر الطاقة تصحيح التمارين

تمرين 1

1-1 تحديد $\Delta\ell$ عند التوازن $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$ الإسقاط على Oz $mg - K\Delta\ell = 0$

$$\Delta\ell = 2,5\text{cm} \quad \text{إذن} \quad \Delta\ell = \frac{mg}{K} \quad \text{تطبيق عددي}$$

1-2 تحديد المعادلة التفاضلية

نختار معلم Oz كمعلم غاليلي ونطبق العلاقة الأساسية لديناميك $\vec{P} + \vec{F}' = m\vec{a}$ إسقاط العلاقة على Oz

$$\Delta\ell' = \Delta\ell + z \quad \text{إطالة النابض عند اللحظة } t \quad mg - K\Delta\ell' = m\ddot{z}$$

عند التوازن $mg - K\Delta\ell = 0$ إذن $-Kz = m\ddot{z}$ أي

$$\ddot{z} + \frac{K}{m}z = 0 \quad \text{أن المعادلة التفاضلية للحركة هي}$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad \text{نضع} \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m} \quad \text{وتصبح المعادلة}$$

إذن فالحركة مستقيمة جيبية نبضها الخاص هو :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

2-2 المعادلة الزمنية للحركة

$$z = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{بحيث أن}$$

عندنا $z = Z_m$ أي أن $\cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$ و $\omega_0 = 20 \text{ rad/s}$ عند اللحظة

$$z = 4.10^{-2} \text{ m}$$

المعادلة الزمنية تكتب على الشكل التالي

$$z = 4.10^{-2} \cos(20t)$$

$$V_1 = -Z_m \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{3-2 نبين أن}$$

نحدد السرعة في اللحظة t وذلك باشتقاق z(t) $v = -Z_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

عند مرور الجسم من موضع توازنه تكون القيمة المطلقة لسرعته قصوى $V_1 = \pm Z_m \omega_0$ وبما أنه يمر

لأول مرة فسيكون منحى السرعة عكس المتجهة \vec{k} أي أن $\vec{V}_1 = -Z_m \sqrt{\frac{K}{m}} \vec{k}$ أي أن $V_1 = -Z_m \sqrt{\frac{K}{m}}$

$$V_1 = 0,8 \text{ m/s} \quad \text{تطبيق عددي}$$

3

الهواء

تسارع الجسم هو $a = g$ ونأخذ $z_0 = 0$ والسرعة البدئية $V_0 = -V_1$

$$z = 5t^2 + 0,8t$$

تمرين 2

1- المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة (S)

المجموعة (S) قابلة للدوران حول المحور Δ

نطبق العلاقة الأساسية للتحرّك على المجموعة (S) في معلم أرضي نعتبره غاليليا .

جرد القوى المطبقة على المجموعة (S) :

\vec{P} و \vec{R} تأثير المحور على الجسم (S) .

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0 \Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

من خلال الشكل يتبين أن

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -2mg \cdot OH$$

$$OH = OG \sin \theta$$

لنحدد OG بتطبيق العلاقة المرجحية على المجموعة (S) :

$$\vec{OG} = \frac{m\vec{OG}_1 + m\vec{OG}_2}{2m}$$

بحيث أن G_1 مركز قصور الساق و G_2 مركز قصور الكرة ز

ونختار O متطابقة مع المحور Δ . أي أن $\vec{OG}_1 = 5R\vec{i}$ و $\vec{OG}_2 = 11R\vec{i}$

$$OG = 8R \text{ وبالتالي } \vec{OG} = \frac{16R}{2}\vec{i} = 8R\vec{i}$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -2mg \cdot OG \sin \theta \Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -16mgR \sin \theta$$

$$16mgR \sin \theta + J_\Delta \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{16mgR}{J_\Delta} \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{16mgR}{J_\Delta} \theta = 0 \text{ بما أن } \sin \theta \approx \theta \text{ فإن } \theta_m = 10^\circ$$

طبيعة حركة المجموعة دورانية جيبية بحيث المعادلة التفاضلية تقبل حلا لها المعادلة ذات الشكل

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \text{ التالي}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{16mgR}} = 1s \text{ دورها الخاص يكتب على الشكل التالي :}$$

2 - المعادلة الزمنية لحركة المجموعة (S) هي :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \text{ بحيث أن } \theta_m = 10^\circ = \frac{\pi}{18} \text{ rad}$$

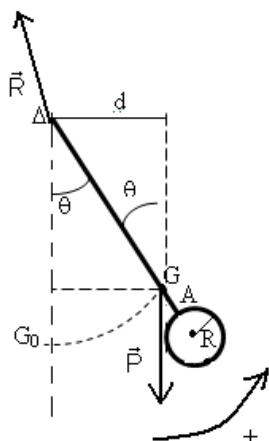
$$\theta(0) = \theta_m = \theta_m \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ عند اللحظة } t = 0 \text{ لدينا}$$

$$\theta(t) = \frac{\pi}{18} \cos(2\pi t)$$

5 - الطاقة الحركية للمجموعة بدلالة الزمن t

$$E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 \Rightarrow E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(2\pi t)$$

تكون الطاقة E_C قصوية



$$-1 \leq \sin(2\pi t) \leq 1 \Rightarrow \sin^2(2\pi t) \leq 1$$

$$\frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(2\pi t) \leq \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$$

$$E_C \leq \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$$

إذن القيمة القصوى للطاقة الحركية هي : $E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$

تطبيق عددي : $E_{Cmax} = 6.10^{-3} J$

6 - نستنتج تعبير طاقة الوضع التفاضلية للمجموعة S :

بما أن الاحتكاكات مهملة نطبق انحفاظ الطاقة الميكانيكية بين موضعين وهما الموضع التوازن الذي تمر منه المجموعة وتكون هنا السرعة قصوى أي أن الطاقة الميكانيكية قصوى $E_{Cmax} = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$ ونعتبر

أن طاقة الوضع منعدمة أي أن $E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$. و موضع ثاني في اللحظة t أي أن الطاقة

الميكانيكية هي $E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(\omega_0 t) + E_p$

انحفاظ الطاقة الميكانيكية $\frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(\omega_0 t) + E_p = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$

$$E_p = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2 (1 - \sin^2(\omega_0 t))$$

$$E_p = E_{Cmax} \cos^2(2\pi t)$$

تمرين 3

I - الدراسة التحريكية

1 - المعادلة التفاضلية

القوى المطبقة على الساق \vec{P} و \vec{R}

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على الساق :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$-Mg \frac{L}{2} \sin \theta = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{MgL}{2J_{\Delta}} \sin \theta = 0$$

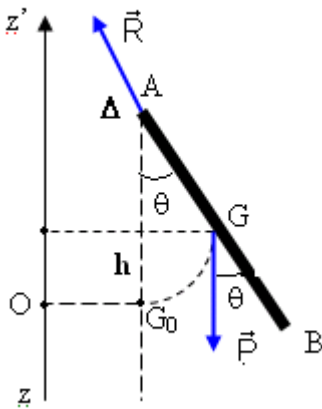
حسب شكل المعادلة التفاضلية فهي ليست خطية إذن فحركة الساق حركة تذبذبية

2 - المعادلة التفاضلية في حالة تذبذبات ذات وسع صغير حسب قانون التوافق (لا يتعلق دور حركة النواس بوسع التذبذبات في حالة التذبذبات ذات وسع صغير)

في حالة تذبذبات ذات وسع صغير $\theta_m = \frac{\pi}{10} rad$ نعتبر أن $\sin \theta \approx \theta$

وتصبح المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L} \theta = 0 \text{ هي فالمعادلة التفاضلية هي } J_{\Delta} = \frac{1}{3} ML^2 \text{ بما أن } \ddot{\theta} + \frac{MgL}{2J_{\Delta}} \theta = 0$$



3 - حساب قيمة الدور :

حسب المعادلة التفاضلية في حالة التذبذبات ذات وسع صغير فإن حركة النواس حركة تذبذبية جيبية

$$T_0 = 1,26s \text{ : تطبيق عددي } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

II - الدراسة الطاقية

1 - نبين العلاقة

نعلم أن طاقة الوضع الثقالية هي : $E_p = Mgz + C$ حسب الحالة المرجعية لطاقة الوضع الثقالية

وحسب الشكل جانبه

$E_p = 0$ بالنسبة $z = 0$ إذن $C = 0$ وطاقة الوضع تكتب على الشكل التالي $E_p = Mgz$ بحيث أن

$$z = \frac{L}{2}(1 - \cos\theta)$$

$$E_p = \frac{MgL(1 - \cos\theta)}{2} \text{ ومنه}$$

أ - 2

الحالة الأولى : عند مرور الساق من موضع توازنها . فحسب الشكل $\theta = 0$ و $E_m = E_c = 0,5J$ و

$$E_p = 0$$

$$\frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}_m^2 = 0,5 \Rightarrow \dot{\theta}_m = \sqrt{\frac{2 \times 0,5}{J_\Delta}} = 5,77 \text{ rad / s}$$

ب - موضع الساق عندما تكون $E_c = 0,25J$ أي أن

$$\theta = \pm \frac{\pi}{3} \text{ rad} \text{ فحسب الشكل } E_m = E_p + E_c \Rightarrow E_p = E_m - E_c = 0,5 - 0,25 = 0,25J$$

الحالة الثانية :

عندما تكون $E_m > E_p \Rightarrow E_c \neq 0$ مهما كانت t أي أن الساق ستدور حول المحور Δ .

• القيمة القصوية والقيمة الدنوية للسرعة الزاوية $\dot{\theta}$

تكون السرعة الزاوية قصوية عندما تكون الطاقة الحركية E_c قصوية ونرمز لها ب $E_{C \max}$ حيث تكون

طاقة الوضع دنوية وحسب المبيان أن طاقة الوضع الدنوية عندما تكون $\theta = 0$ أي $E_{p \min} = 0$ وفي هذه

$$E_m = E_{C \max} = \frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}_{\max}^2 \Rightarrow \dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{2E_m}{J_\Delta}} \text{ الحالة}$$

لدينا $J_\Delta = \frac{1}{3}ML^2 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2$ وأن E_m حسب الشكل هي : $E_m = 1,5J$

$$\dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{2E_m}{J_\Delta}} = 10,8 \text{ rad / s}$$

تكون السرعة الزاوية دنوية عندما تكون الطاقة الحركية دنوية $E_{C \min}$ وتكون طاقة الوضع قصوية وفي هذه

الحالة

$$E_m = E_{C \min} + E_{p \max} \Rightarrow E_{C \min} = E_m - E_{p \max}$$

$$\frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}_{\min}^2 = E_m - E_{p \max} \Rightarrow \dot{\theta}_{\min} = \sqrt{\frac{2(E_m - E_{p \max})}{J_\Delta}} \text{ أي أن}$$

حسب المبيان لدينا :

$$\dot{\theta}_{\min} = \sqrt{\frac{2(E_m - E_{p\max})}{J_{\Delta}}} = 4,08 \text{ rad/s} \quad \text{وبالتالي } E_{p\max} = 1,5 \text{ J و } E_m = 1,75 \text{ J}$$

تمرين 4

نعتبر أن النابض عندما يكون لا مطال ولا مكبوس وتوجد فوقه الكفة P أن طوله هو ℓ_0 عند وضع الجسم (S) فوق الكفة يصبح طول النابض ℓ_1 ويعتبر هذا الموضع موضع التوازن المستقر حيث نعتبره أصل المحور الرأسى (O, \vec{k}) موجه نحو الأعلى .

1 - عند التوازن القوى المطبقة على المجموعة

\vec{P} و \vec{F} تطبق شرط التوازن في المركز G

$$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ونسقط هذه العلاقة على المحور Oz}$$

$$\vec{P} - k\overline{G_0G_{eq}} = \vec{0}$$

$$-(m_1 + m_2)g + k|\Delta\ell| = 0$$

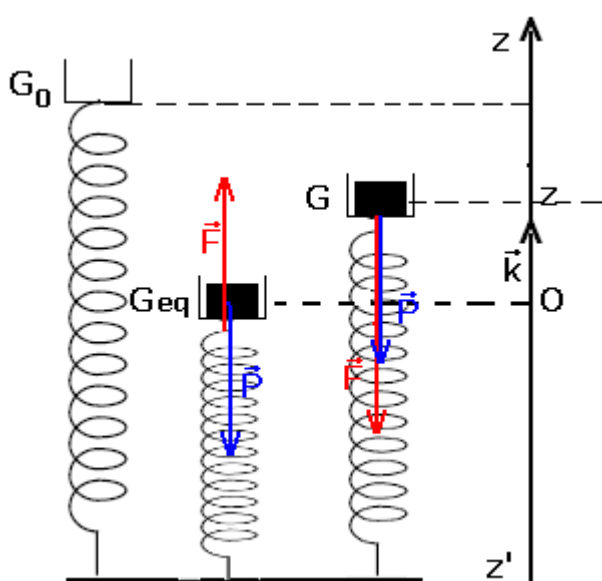
$$|\Delta\ell| = \frac{(m_1 + m_2)g}{K}$$

$$|\Delta\ell| = 1 \text{ cm}$$

2 - المعادلة التفاضلية للحركة :

نطبق العلاقة الأساسية لديناميك على المجموعة

$$\vec{F} + \vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$



$$-k\overline{G_0G} + \vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{a} \Rightarrow -k(\overline{G_0G_{eq}} + \overline{G_{eq}G}) + \vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

$$-k\overline{G_0G_{eq}} - k\overline{G_{eq}G} + \vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

حسب السؤال السابق لدينا $\vec{P} - k\overline{G_0G_{eq}} = \vec{0}$

$$-k\overline{G_{eq}G} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

نسقط هذه العلاقة المتجهية على Oz : $-kz = (m_1 + m_2)\ddot{z}$

إذن المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة هي : $\ddot{z} + \frac{k}{m_1 + m_2}z = 0$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)}{k}} \quad \text{نستنتج الدور الخاص للحركة :}$$

حساب T_0 :

$$T_0 = 0,2 \text{ s}$$

2 - 2 المعادلة الزمنية لحركة المجموعة :

حركة G تذبذبية فمعادلتها الزمنية والتي هي حل للمعادلة التفاضلية السابقة هي :

تحديد الطور عند اللحظة $t=0$

$$z(0) = Z_m \cos \varphi \Rightarrow 0,2 = Z_m \cos \varphi$$

بالنسبة للسرعة عند اللحظة $t=0$

$$\dot{z}(t) = -Z_m \frac{2\pi}{T_0} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$t = 0 \Leftrightarrow \dot{z}(0) = -Z_m \frac{2\pi}{T_0} \sin \varphi$$

$$\dot{z}(0) = -1,2 = -Z_m \frac{2\pi}{T_0} \sin \varphi \text{ إذن } \dot{z}(0) < 0$$

من المعادلتين نستنتج :

$$\begin{cases} 0,2 = Z_m \cos \varphi \\ 1,2 = Z_m 10\pi \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{0,2}{Z_m} = \cos \varphi \\ \frac{1,2}{10\pi Z_m} = \sin \varphi \end{cases}$$

$$\cos \varphi = \frac{0,200}{0,203} \Rightarrow \varphi = 10^\circ = \frac{\pi}{18} \text{ rad و بالنسبة لـ } Z_m = 0,203m$$

$$z(t) = 0,2 \cos(10\pi t + \frac{\pi}{18})$$

3- نختار أصل لمعلم كمرجع لطاقة الوضع الثقالية :

نحن بصدد اختيار Oz موجه نحو الأعلى إذن $E_p(t) = (m_1 + m_2)gz(t) + C$ بما أنه الحالة المرجعية تم

اختيارها في المستوى حيث $z=0$ فإن $C=0$

طاقة الوضع المرنة حسب التعريف $E_p = \frac{1}{2}ka^2 + Cte$ حيث a إطالة النابض

$$0 = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 + Cte \Rightarrow Cte = -\frac{1}{2}k\Delta\ell^2 \text{ إذن } z=0 \text{ مرجعية ونختار كحالة مرجعية } a = |\Delta\ell| - z$$

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kz^2 - k|\Delta\ell|z \text{ عند نشر هذه العلاقة نحصل على } E_p(t) = \frac{1}{2}k(|\Delta\ell| - z)^2 - \frac{1}{2}k\Delta\ell^2$$

إذن الطاقة الميكانيكية للمجموعة هي :

$$E_m(t) = E_p(t) + E_c(t)$$

$E_p(t)$ طاقة الوضع الكلية للمجموعة و $E_c(t)$ الطاقة الحركية للمجموعة .

$$E_m(t) = \frac{1}{2}kz^2 - k|\Delta\ell|z + (m_1 + m_2)gz + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{z}^2$$

$$-(m_1 + m_2)g + k|\Delta\ell| = 0 \text{ نعلم أنه عند التوازن}$$

$$E_m(t) = \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{z}^2 \text{ إذن}$$

نستنتج المعادلة التفاضلية للحركة نعلم أن الحركة تتم بدون احتكاك إذن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية

$$\frac{dE_m(t)}{dt} = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{z} + kz = 0$$

$$\ddot{z} = -\frac{k}{(m_1 + m_2)}z$$

$$\ddot{z} + \frac{k}{(m_1 + m_2)}z = 0$$

3 - 2 السرعة V التي ستمر بها المجموعة من النقطة 0 لأول مرة .

نطبق مبدأ انحفاظ الطاقة الميكانيكية عند انتقال الجسم من الموضع ذي الأنسوب $z=0$ و $z=z_m$

$$\frac{1}{2}kZ_m^2 + 0 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + 0$$

$$V = 1,2m/s \text{ تطبيق عددي } V = \sqrt{\frac{kZ_m^2}{m_1 + m_2}} \text{ يعني أن}$$

نبين أن المجموعة ممكن أن تتذبذب بوسع $z_i > z$ دون أن يغادر الجسم الكفة :

نطبق القانون الثاني لنيوتن على الجسم S الموضوع على الكفة $\vec{P} + \vec{R} = (m_1 + m_2)\vec{a}$

إسقاط العلاقة على Oz $-(m_1 + m_2)g + R = (m_1 + m_2)\ddot{z}$ حسب الدراسة السابقة

$$\ddot{z} = -\frac{k}{m_1 + m_2}z$$

نعوض \ddot{z} في العلاقة

$$-(m_1 + m_2)g + R = -(m_1 + m_2)\frac{k}{m_1 + m_2}z$$

$$R = (m_1 + m_2)g - kz$$

لكي لا يغادر الجسم الكفة يجب أن تكون $R > 0$ هذا يعني أن $z_i < \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$

نضع $Z_m = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$ لكي يبقى الجسم في حركة تذبذب حول 0 يجب $z_i < Z_m \Rightarrow z_i < 1cm$

مما يبين أن دراستنا النظرية لا يمكن أن توافق ما هو تجريبي وهذا ما سنتطرق إليه في الجزء الثاني

4 - تعبري Z_{\max} و Z_{\max}

نطبق انخفاض الطاقة الميكانيكية قبل الانفصال وبعد الانفصال .

$$E_m = \frac{1}{2}m_1V^2 + 0 \text{ : قبل الانفصال}$$

$$E'_m = 0 + m_1gz_{\max} \text{ : بعد الانفصال}$$

$$E_m = E'_m \Rightarrow z_{\max} = \frac{V^2}{2g} \text{ تطبيق عددي } z_{\max} = 7,2cm$$

بالنسبة للناض والكفة

$$E_m = \frac{1}{2}m_2V^2 + 0 + 0 \text{ : مباشرة قبل الانفصال}$$

$$E'_m = \frac{1}{2}kZ_{\max}^2 + m_2gZ_{\max} \quad \text{بعد الانفصال}$$

$$E_m = E'_m \Rightarrow Z_{\max}^2 + 2m_2gZ_{\max} - m_2V^2 = 0$$

$$Z_m^2 + 4Z_m - 0,29 = 0 \quad \text{معادلة من الدرجة الثانية}$$

$$Z_{\max} = 0,07m \quad \text{نحتفظ بالحل الموجب}$$

تمرين 5

1 - طبيعة حركة القرص :

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على القرص له حركة دوران حول محور يجسده السلك
جهد القوى المطبقة على السلك :

\vec{P} وزن القرص ، \vec{R} تأثير السلك على القرص ، مزدوجة اللي المطبقة من طرف السلك .

$$\mathcal{M}_C = J_\Delta \ddot{\theta} \Rightarrow -C\theta = J_\Delta \ddot{\theta} \quad \text{لدينا } \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0 \text{ و } \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0$$

وبالتالي نحصل على المعادلة التفاضلية التالية : $\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$ خطية حلها جيبي وبالتالي فطبيعة

حركة القرص حركة دورانية جيبية .

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}} \quad \text{دورها هو :}$$

2 - حساب ثابتة اللي بالنسبة ل $T_0 = 0,92s$:

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{J_\Delta}{C} \Rightarrow C = \frac{4\pi^2 J_\Delta}{T_0^2} = 0,233.10^{-2} N.m.rad^{-1}$$

3 - طبيعة حركة النواس الجديد :

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على النواس الجديد :

جهد القوى المطبقة على النواس الجديد :

\vec{P} وزن القرص ، \vec{R} تأثير السلك على القرص ، مزدوجة اللي المطبقة من طرف السلك (1) ومزدوجة اللي المطبقة من طرف السلك (2) .

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0 \quad \text{و} \quad \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_{C_1} + \mathcal{M}_{C_2} = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0 \quad \text{فإن } \mathcal{M}_{C_1} + \mathcal{M}_{C_2} = J_\Delta \ddot{\theta}$$

بحيث أن $\mathcal{M}_{C_1} = -C_1\theta$ و $\mathcal{M}_{C_2} = -C_2\theta$.

حسب المعطيات لدينا أن C_1 تتناسب عكسيا مع طول السلك ، أي أن $C_1 = \frac{K}{L-z}$ و $C_2 = \frac{K}{z}$ أي أن

ثابتة اللي للسلك الذي طوله L كذلك تتناسب عكسيا مع الطول : $C = \frac{K}{L}$

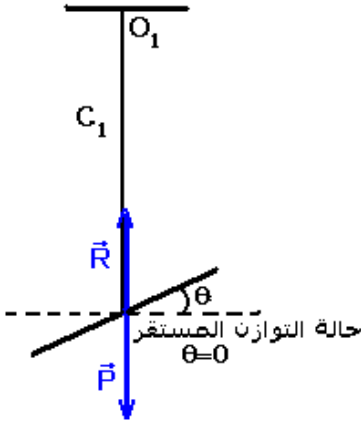
$$-K\left(\frac{1}{L-z} + \frac{1}{z}\right)\theta = J_\Delta \ddot{\theta} \quad \text{في المعادلة } C_2 \text{ و } C_1 \text{ نعوض } -C_1\theta - C_2\theta = J_\Delta \ddot{\theta} \Rightarrow -(C_1 + C_2)\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$$

لدينا كذلك : $K = C.L$ أي

$$-C.L\left(\frac{1}{L-z} + \frac{1}{z}\right)\theta = J_\Delta \ddot{\theta} \Rightarrow -\frac{L^2}{z(L-z)}C = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{L^2.C}{z(L-z).J_\Delta}\theta = 0$$

ب - تعبير الدور T'_0 :



$$T'_0 = 2\pi \sqrt{\frac{z(L-z) \cdot J_\Delta}{L^2 \cdot C}} = \frac{T_0}{L} \sqrt{z(L-z)}$$

حساب T'_0 في حالة $z = \frac{L}{3}$

$$T'_0 = \frac{T_0}{L} \sqrt{\frac{L}{3} \left(\frac{2L}{3} \right)} = \frac{T_0}{3} \sqrt{2} = 0,43s$$

ج - لنبين أن T'_0 تأخذ قيمة قصوية بالنسبة ل $z = z_{\max}$
نحسب المشتقة الأولى ل T'_0 :

$$z = \frac{L}{2} \quad \text{وبالتالي فإن } T'_0 \text{ تأخذ قيمة قصوية بالنسبة ل } z = \frac{L}{2} \quad \frac{dT'_0}{dt} = \frac{T_0(L-2z)}{2L\sqrt{z(L-z)}} = 0 \Rightarrow L-2z=0$$

$$T'_{0\max} = \frac{T_0}{2} = 0,46s \quad \text{في هذه الحالة تكون}$$

تمرين 6

1 - السرعة الزاوية القصوية للرقاص :

طاقة الوضع للي بالنسبة للنايض الحلزوني $E_p = \frac{1}{2} C \theta^2 + Cte$ نختار

كحالة مرجعية الحالة التي يكون فيها النايض غير مشوه ، عند موضع التوازن $\theta = 0$ يكون النايض غير مشوه $E_p = 0$ أي أن $Cte = 0$ و

$$E_p = \frac{1}{2} C \theta^2$$

نعلم أن الرقاص يأخذ سرعة قصوية عند مروره بموضع توازنه . كما أنه عند حركة النواس هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية أي : $E_m(0) = E_m(\text{equilibre})$ بحيث أن $E_m(0) = E_p(0) + E_c(0)$ الطاقة

الميكانيكية عند انطلاق الرقاص بدون سرعة بدئية $E_c(0) = 0$ و $E_p(0) = \frac{1}{2} C \theta_m^2$ يعني أن

$$(1) E_m = \frac{1}{2} C \theta_m^2$$

عند مروره من موضع توازنه $E_p = 0$ و $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_{\max}^2$ يعني أن $E_m = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_{\max}^2$ (2)

$$\frac{1}{2} C \theta_m^2 = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_{\max}^2 \Rightarrow \dot{\theta}_{\max} = \theta_m \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}} \quad \text{من العلاقتين (1) و (2) نستنتج}$$

تطبيق عددي : $\dot{\theta}_{\max} = 1,66 \text{ rad / s}$

2 - حساب طاقة الوضع والطاقة الحركية للنواس

نطبق انحفاظ الطاقة الميكانيكية بين موضعين مثلا عند مروره من موضع التوازن وموضع في اللحظة

$$\frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}_{max}^2 = \frac{1}{2} C \theta^2 + E_C(t) \Rightarrow E_C(t) = \frac{1}{2} C \theta_m^2 - \frac{C \theta_m^2}{8}$$

$$E_C(t) = \frac{3C \theta_m^2}{8}$$

$$E_p = \frac{1}{2} C \theta^2 \Rightarrow E_p = \frac{C \theta_m^2}{8} : \text{حساب طاقة الوضع}$$

$$E_p = 0,014.10^{-4} J \text{ و } E_C = 0,042.10^{-4} J : \text{تطبيق عددي}$$

تمرين 7

1 - أ. نطبق العلاقة الأساسية على الجسم A : $\sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_i) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$

جهد القوى المطبقة على الجسم A :

\vec{P} وزن الجسم A

\vec{T} توتر القضيب

\vec{R} تأثير المحور على القضيب .

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{T}) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

القوة \vec{T} والقوة \vec{R} يتقاطعا مع المحور Δ فإن عزمهما

منعدم . أي أن $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = -mgd \text{ بحيث أن } d = l \sin \theta \text{ إذن}$$

$$-mg \ell \sin \theta = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

ونستنتج المعادلة التفاضلية لحركة الجسم A

$$\ddot{\theta} + \frac{mg \ell}{J_{\Delta}} \sin \theta = 0 \text{ في حالة التذبذبات ذات الوسع}$$

صغير في هذه الحالة الدور الخاص لا يتعلق بوسع

التذبذبات : $\sin \theta \approx \theta$

وتصبح المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$$\ddot{\theta} + \frac{mg \ell}{m \ell^2} \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

يتبين من المعادلة التفاضلية أن حركة A حركة دائرية

جيبية .

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} : \text{لهذا النواس} \text{ حساب الدور } T : T_0 = 0,4\pi s = 1,26s$$

2 - أ البرهان على أن الطاقة الحركية للمجموعة تساوي الطاقة الحركية للقضيب :

$$E_C = E_C(\text{tige}) + E_C(A) + E_C(\text{terre})$$

$$E_C = \frac{1}{2} J'_{\Delta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + 0$$

نعلم أن كتلة القضيب مهملة بالنسبة لكتلة الجسم إذن فعزم قصوره منعدم في هذه الحالة لأن كتلة

$$E_C = E_C(A) : \text{المجموعة مركزة في الجسم A إذن الطاقة الحركية للمجموعة}$$

ب - تعبير الطاقة الحركية للمجموعة : $E_C = \frac{1}{2} J_A \dot{\theta}^2 \Rightarrow E_C = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$

ج - طاقة الوضع الثقالية للمجموعة :

حسب تعريف طاقة الوضع الثقالية : $E_p = mgz + cte$ نختار Oz موجه نحو الأعلى أي أن

$$z = 0 \Rightarrow E_p = 0 \Rightarrow cte = 0$$

$E_p = mgl(1 - \cos \theta)$ في حالة التذبذبات ذات الوسع صغير فإن $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ وفي هذه الحالة

تكون طاقة الوضع على الشكل التالي :

$$E_p = mgl \frac{\theta^2}{2}$$

د - الطاقة الميكانيكية للمجموعة :

$$E_m = E_c + E_p$$

بما أننا بصدد حركة تذبذبية جيبية فإن معادلتها الزمنية تكتب على الشكل التالي

$$\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{2\pi}{T_0} \theta_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

نعوض في المعادلة للطاقة الميكانيكية :

$$E_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mgl \theta^2$$

$$= \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \theta_m^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) + \frac{1}{2} mgl \theta_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

حسب المعادلة التفاضلية عندنا $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$

$$E_m = \frac{1}{2} m l^2 \frac{g}{l} \theta_m^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) + \frac{1}{2} mgl \theta_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

$$= \frac{1}{2} m l \theta_m^2 \left(\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) \right)$$

$$E_m = \frac{1}{2} m l \theta_m^2$$

نستنتج أن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية نظرا لأن $E_m = Cte$

3 - 1 - نطبق مبرهنة الطاقة الحركية بين الوضع المستقر والوضع التي تكون فيه الزاوية قصوى α_m

$$-\frac{1}{2}mv_A^2 = -mgl(1 - \cos \alpha_m)$$

$$mv_A^2 = 2mgl - 2mgl \cos \alpha_m$$

$$\cos \alpha_m = 1 - \frac{v_A^2}{2gl}$$

$$\alpha_m = \frac{\pi}{3} \text{ تطبيق عددي نجد}$$

أ - السرعة الانوية التي يجب إعطاؤها للجسم A لكي يصل القضيب إلى وضع توازنه غير المستقر :

وضع التوازن غير المستقر : $\alpha_m = \pi$ أي أن $\cos \alpha_m = -1$ يعني أن $v_A' = 2\sqrt{gl}$

تطبيق عددي $v_A' = 4m / s$

ب - حركة القضيب ستكون في هذه الحالة حركة دورانية حول المحور Δ أي مسار الكرة مسار دائري مركزه النقطة التي يمر منها المحور Δ .