

المعادلات التفاضلية

السلسلة 1 (4 تمارين)

التمرين 1 :

نعتبر المعادلة التفاضلية $(E) \quad 2y' - y = 0$

(1) حدد الحل العام للمعادلة التفاضلية (E)

(2) حدد الحل f للمعادلة التفاضلية (E) و الذي يحقق $f(1) = \sqrt{2}$

التمرين 2 :

لتكن f دالة عددية قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} بحيث :

لكل x من $\mathbb{R} : f(x) = (2 - 3f'(x))f(x)$ و $f'(x) \neq 0$ و $f(0) = 1$

نضع $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) = \frac{1}{f(x)}$

(1) بين أن g حل لمعادلة تفاضلية من الدرجة الأولى يتم تحديدها

(2) حدد تعبير $f(x)$

التمرين 3 :

حل المعادلات التفاضلية :

$$(E_1) \quad y'' - 2y' - 3y = 0$$

$$(E_2) \quad 9y'' - 6y' + y = 0$$

$$(E_3) \quad y'' - 4y' + 13y = 0$$

التمرين 4 :

لتكن المعادلة التفاضلية $(E) : y' + 3y = x^2$

(1) حدد دالة حدودية g من الدرجة الثانية تكون حلا للمعادلة التفاضلية (E)

(2) بين أن دالة f تكون حلا للمعادلة التفاضلية (E) إذا وفقط إذا كانت $f - g$ حلا للمعادلة التفاضلية $(E_1) : y' + 3y = 0$

(3) حل المعادلة التفاضلية (E_1) ثم استنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية (E)

تصحيح التمرين الأول

$$(1) \text{ المعادلة } 2y' - y = 0 \text{ تكافئ } y' = \frac{1}{2}y$$

مجموعة حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} : $y : x \mapsto \lambda e^{\frac{1}{2}x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

$$(2) f \text{ يحقق المعادلة } (E) \text{ إذن } f(x) = \lambda e^{\frac{x}{2}} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\text{و بما أن } f(1) = \sqrt{2} \text{ فإن } \lambda e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \text{ إذن } \lambda \sqrt{e} = \sqrt{2} \text{ إذن } \lambda = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{2e}}{e}$$

$$\text{ومنّه : } (\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = \frac{\sqrt{2e}}{e} e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{2e} e^{\frac{x}{2}-1}$$

تصحيح التمرين الثاني

(1) لتكن f دالة عددية قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} بحيث :

$$\text{لكل } x \text{ من } \mathbb{R} : f'(x) = (2 - 3f(x))f(x) \text{ و } f(x) \neq 0$$

$$g'(x) = \left(\frac{1}{f(x)} \right)'$$

$$g'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$g'(x) = \frac{-(2 - 3f(x))f(x)}{(f(x))^2}$$

$$g'(x) = \frac{3f(x) - 2}{f(x)}$$

$$g'(x) = 3 - \frac{2}{f(x)}$$

$$g'(x) = 3 - 2g(x)$$

$$g'(x) = -2g(x) + 3$$

إذن g حل للمعادلة التفاضلية $y' = -2y + 3$

(2) لدينا g حل للمعادلة التفاضلية $y' = -2y + 3$

$$\text{إذن } (\forall x \in \mathbb{R}) g(x) = \lambda e^{-2x} - \frac{3}{-2}$$

$$\text{إذن : } (\forall x \in \mathbb{R}) g(x) = \lambda e^{-2x} + \frac{3}{2}$$

و لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) = \frac{1}{f(x)}$

إذن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = \frac{1}{g(x)}$

إذن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = \frac{1}{\lambda e^{-2x} + \frac{3}{2}}$

و بما أن $f(0) = 1$ فإن $\frac{1}{\lambda + \frac{3}{2}} = 1$ إذن $\lambda = \frac{-1}{2}$

و بالتالي : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = \frac{1}{\frac{-1}{2}e^{-2x} + \frac{3}{2}}$

أي : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = \frac{2}{3 - e^{-2x}}$

تصحيح التمرين الثالث

✓ لنحل المعادلة التفاضلية $(E_1) \quad y'' - 2y' - 3y = 0$

• المعادلة المميزة $r^2 - 2r - 3 = 0$

لدينا $\Delta = 16$

إذن المعادلة المميزة تقبل حلين حقيقيين : $r_1 = -1$ و $r_2 = 3$

• إذن مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $(E_1) \quad y'' - 2y' - 3y = 0$ هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad y : x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta e^{3x}$

✓ لنحل المعادلة التفاضلية $(E_2) \quad 9y'' - 6y' + y = 0$

• المعادلة المميزة $9r^2 - 6r + 1 = 0$

لدينا $\Delta = 0$

إذن المعادلة المميزة تقبل حلا وحيدا : $r_0 = \frac{1}{3}$

• إذن مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $(E_2) \quad 9y'' - 6y' + y = 0$ هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad y : x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{\frac{1}{3}x}$

✓ لنحل المعادلة التفاضلية $(E_3) \quad y'' - 4y' + 13y = 0$

• المعادلة المميزة $r^2 - 4r + 13 = 0$

لدينا $\Delta = -36$

إذن المعادلة المميزة تقبل حلين عقديين مترافقين أحدهما : $r = 2 + 3i$

- إذن مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $y'' - 4y' + 13y = 0$ (E_3) هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :
 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad y : x \mapsto (\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x) e^{2x}$

تصحيح التمرين الرابع

(1) لنحدد دالة حدودية g من الدرجة الثانية تكون حلا للمعادلة التفاضلية $y' + 3y = x^2$ (E):

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{نضع}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'(x) = 2ax + b \quad \text{لدينا}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'(x) + 3g(x) = x^2 \quad \text{إذن } (E): \quad y' + 3y = x^2 \quad \text{حل للمعادلة}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 2ax + b + 3(ax^2 + bx + c) = x^2 \quad \text{إذن}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 2ax + b + 3ax^2 + 3bx + 3c = x^2 \quad \text{إذن}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 3ax^2 + (2a + 3b)x + (b + 3c) = x^2 \quad \text{إذن}$$

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 2a + 3b = 0 : \text{ ومنه} \\ b + 3c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{-2}{9} : \text{ وبالتالي} \\ c = \frac{2}{27} \end{cases}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27} \quad \text{نستنتج أن:}$$

(2)

✓ نفترض أن f تكون حلا للمعادلة التفاضلية (E)

$$\boxed{1} \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) + 3f(x) = x^2 \quad \text{إذن}$$

و نعلم أن g حل للمعادلة التفاضلية (E)

$$\boxed{2} \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'(x) + 3g(x) = x^2 \quad \text{إذن}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) - g'(x) + 3f(x) - 3g(x) = 0 \quad \text{بحساب } \boxed{1} - \boxed{2} \quad \text{نجد:}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (f - g)'(x) + 3(f - g)(x) = 0 \quad \text{إذن}$$

و منه $f - g$ حلا للمعادلة التفاضلية $y' + 3y = 0$ (E_1):

✓ عكسيا نفترض أن $f - g$ حلا للمعادلة التفاضلية $y' + 3y = 0$ (E_1):

$$\begin{aligned} & \text{إذن } (\forall x \in \mathbb{R}) \quad (f - g)'(x) + 3(f - g)(x) = 0 \\ & \text{إذن } (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) - g'(x) + 3f(x) - 3g(x) = 0 \\ & \text{إذن } (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) + 3f(x) = g'(x) - 3g(x) \\ & \text{و بما أن } g \text{ حل للمعادلة } (E): y' + 3y = x^2 \text{ فإن } (\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'(x) + 3g(x) = x^2 \\ & \text{إذن } (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) + 3f(x) = x^2 \\ & \text{و منه } f \text{ حل للمعادلة التفاضلية } (E) \end{aligned}$$

(3)

$$\checkmark \text{ لنحل المعادلة التفاضلية } (E_1): y' + 3y = 0$$

$$(E_1): y' = -3y \quad \text{تكافئ} \quad (E_1): y' + 3y = 0$$

مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $(E_1): y' + 3y = 0$ هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$(\lambda \in \mathbb{R}) \quad y : x \mapsto \lambda e^{-3x}$$

\checkmark نعلم أنه $f - g$ حلا للمعادلة التفاضلية $(E_1): y' + 3y = 0$ تعني أن f تكون حلا للمعادلة التفاضلية (E)

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (f - g)(x) = \lambda e^{-3x}$$

$$\text{إذن: } (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = g(x) + \lambda e^{-3x}$$

$$\text{إذن: } (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27} + \lambda e^{-3x} \quad \text{حيث } (\lambda \in \mathbb{R})$$

つづく