



**.01**

لنعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على ب :  $f(x) = -x + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$  (C) منحنى  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**...01**

- حدد : D مجموعة تعريف الدالة  $f$ .
- أحسب :  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم أعط تأويل هندسي للنتيجة الثانية.
- بين أن (C) يقبل مقارب مائل ( $\Delta$ ) بجوار  $+\infty$  يتم تحديد معادلته.
- أدرس الوضع النسبي ل (C) و ( $\Delta$ ).

**...02**

- أحسب  $f'$  الدالة المشتقة ل  $f$  على D ثم حدد إشارتها.
- ضع جدول لتغيرات الدالة  $f$ .
- أوجد معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C) في  $x_0 = 0$ .

**03** بين أن المعادلة :  $f(x) = x$  ;  $x \in ]-1; +\infty[$  تقبل حل وحيد  $\alpha$  حيث  $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ .

**04** أنشئ المنحنى الممثل للدالة  $f$  و المستقيم ( $\Delta$ ) و المماس (T) في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**...05**

- بين أن  $f$  تحقق تقابل من  $]-1; +\infty[$  إلى مجال J يتم تحده نضع  $f^{-1}$  الدالة العكسية ل  $f$ .
- بين أن :  $f^{-1}$  قابلة للاشتقاق على J.
- أحسب بدلالة  $\alpha$  :  $(f^{-1})'(\alpha)$ .
- ثم أنشئ المنحنى الممثل للدالة العكسية  $f^{-1}$  في نفس المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (بلون آخر).

**.02**

لنعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على ب :  $f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{2x+1} & ; x \geq 0 \\ -x + \sqrt{x^2 - x} & ; x < 0 \end{cases}$  (C) منحنى  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**...01**

- تحقق أن : مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي  $D = \mathbb{R}$ .
- أحسب :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم أعط تأويل هندسي للنتيجة الأولى.
- أدرس الفرع اللانهائي ل (C) بجوار  $-\infty$ .
- أدرس اتصال الدالة  $f$  في النقطة  $x_0 = 0$ .
- أدرس اشتقاق الدالة  $f$  في النقطة  $x_0 = 0$ .



**02...**

**أ-** بين أن : الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$  ثم أحسب الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$  على  $]0, +\infty[$  ثم حدد إشارتها .

**ب-** بين أن : الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $] -\infty, 0[$  ثم أحسب الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$  على  $] -\infty, 0[$  ثم تحقق أن

$$\forall x \in ] -\infty, 0[ ; f'(x) = -1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

**ج-** ضع جدول لتغيرات الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  .

**03.** نعتبر  $g$  قصور الدالة  $f$  على  $I = ] -\infty, 0[$  .

**أ-** بين أن  $g$  تقابل من  $I$  إلى مجال  $J$  يتم تحده نضع  $g^{-1}$  الدالة العكسية ل  $g$  .

**ب-** أحسب :  $g^{-1}(1)$  ثم  $(g^{-1})'(1)$  .

**ج-** حدد الدالة العكسية  $f^{-1}$  .

**04.** أنشئ المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ثم أنشئ المنحنى الممثل للدالة العكسية  $g^{-1}$  في نفس المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (بلون آخر)

**03.**

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب  $f(x) = \cos x - \sin^2 x$  . (C) منحنى  $f$  في معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  مع  $\|\vec{i}\| = 1$  و  $\|\vec{j}\| = 4$  (بالسنتيمتر)

**01.** أدرس زوجية الدالة  $f$  .

**02.** بين أن : الدالة  $f$  دورية ودورها  $2\pi$  ثم استنتج  $D_E$  مجموعة دراسة الدالة  $f$  .

**03.** تحقق أن :  $x \in [0, \pi]$  ,  $f'(x) = 2 \sin x \left( \cos x - \frac{1}{2} \right)$

**04.** أدرس إشارة  $f'$  على  $[0, \pi]$  ثم ضع جدول لتغيرات الدالة  $f$  على  $[0, \pi]$  .

**05.** بين أن :  $g$  قصور  $f$  على  $\left[ \frac{\pi}{3}; \pi \right]$  تحقق تقابل من  $\left[ \frac{\pi}{3}; \pi \right]$  إلى  $J$  يتم تحده نرمز لتقابلها العكسي ب  $g^{-1}$  .

**06.** أنشئ  $(C_f)$  منحنى  $f$  في  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  و ذلك على  $D_E$  (بلون أخضر)

**07.** أتم إنشاء  $(C_f)$  منحنى  $f$  على  $[-\pi, 2\pi]$  في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (بلون آخر) ثم  $(C_{g^{-1}})$  منحنى الدالة  $g^{-1}$  في نفس المعلم (بلون أخضر متقطع) .

**04.** تمرين إضافي ( في المنزل )

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  ب :

$$(C) \text{ منحنى } f \text{ في معلم متعامد ممنظم } (O, \vec{i}, \vec{j}) \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} ; x \in [0; 1[ \cup ]1; +\infty[ \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$



...01

أ- أحسب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم أعط تأويل هندسي للنتيجة .

ب- أدرس اتصال الدالة  $f$  في النقطة  $x_0 = 1$  .

ج- أدرس اتصال الدالة  $f$  على يمين النقطة  $x_0 = 0$  .

...02

أ- بين أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0 = 1$  و تحقق أن  $f'(1) = -\frac{1}{8}$  .

ب- أوجد معادلة ديكارتية لماس (T) للمنحنى (C) في  $x_0 = 1$  .

...03

أ- هل الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على يمين  $x_0 = 0$  ثم أعط تأويل هندسي للنتيجة المحصل عليها .

ب- بين أن : الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[ \setminus \{1\}$  ثم أحسب الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$  على  $]0, +\infty[ \setminus \{1\}$  ثم تحقق أن

$$. \forall x \in ]0, +\infty[ \setminus \{1\} ; f'(x) = \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$$

ج- بين أن  $f$  تحقق تقابل من  $]0, +\infty[$  إلى مجال  $J$  يتم تحدهه نضع  $f^{-1}$  الدالة العكسية ل  $f$  .

04. أنشئ المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المعلم  $(0, \bar{i}, \bar{j})$  ثم أنشئ المنحنى الممثل للدالة العكسية  $f^{-1}$  في نفس المعلم  $(0, \bar{i}, \bar{j})$  .



.01

لنعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على ب :  $f(x) = -x + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$  (C) منحنى  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

...01

أ- حدد : D مجموعة تعريف الدالة  $f$  .  
لدينا :

$$x \in D_f \Leftrightarrow x+1 > 0 \\ \Leftrightarrow x > -1$$

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة  $f$   $D_f = ]-1; +\infty[$

ب- احسب :  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم أعط تأويل هندسي للنتيجة الثانية .  
لدينا :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \frac{2}{\sqrt{x+1}} = -\infty ; \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1}} = 0 \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} -x + \frac{2}{\sqrt{x+1}} = +\infty ; \left( \lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{x+1} = 0^+ \right)$$

• التأويل الهندسي للنتيجة الثانية : منحنى الدالة يقبل مقارب عمودي هو المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة :  $x = -1$  .

ج- نبين أن (C) يقبل مقارب مائل  $(\Delta)$  بجوار  $+\infty$  يتم تحديد معادلته .  
لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  إذن (C) يقبل فرع اللانهائي بجوار  $+\infty$

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \frac{2}{\sqrt{x+1}} - (-x) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1}} = 0$$

و منه المستقيم ذو المعادلة  $y = -x$  مقارب مائل ل (C) بجوار  $+\infty$

د- ندرس الوضع النسبي ل (C) و  $(\Delta)$  .

$$\text{لدينا : } f(x) - (-x) = -x + \frac{2}{\sqrt{x+1}} - (-x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} > 0$$

و منه : المنحنى (C) يوجد فوق المقارب المائل .

...02

أ- نحسب  $f'$  الدالة المشتقة ل  $f$  على D ثم حدد إشارتها .

$$f'(x) = \left[ -x + \frac{2}{\sqrt{x+1}} \right]' = -1 + 2 \times (\sqrt{x+1})' \times \frac{-1}{\sqrt{x+1}^2}$$

$$= -1 - 2 \times \frac{1}{\sqrt{x+1}} \times \frac{1}{x+1} \quad \text{لدينا :}$$

$$= -\frac{(x+1)\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)\sqrt{x+1}} < 0 ; (x+1 > 0)$$



ب- نضع جدول لتغيرات الدالة  $f$ .

$x$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

ج- أوجد معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C) في  $x_0 = 0$ .  
لدينا:

$$y = (x - x_0)f'(x_0) - f(x_0) ; (x_0 = 0)$$

$$= -3x + 2 ; (f'(0) = -3 ; f(0) = 0)$$

خلاصة: معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C) في  $x_0 = 0$  هي:  $y = -3x + 2$  (T)

03. بين أن المعادلة:  $f(x) = x$  ;  $x \in ]-1; +\infty[$  تقبل حل وحيد  $\alpha$  حيث  $0 < \alpha < \frac{3}{2}$ .

نعتبر الدالة:  $g(x) = f(x) - x$

• الدالة  $g$  هي متصلة على  $]-1; +\infty[$  (لأنها مجموع دالتين متصلتين) إذن هي متصلة على  $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ .

• الدالة  $g$  هي قابلة للاشتقاق على  $\left[0; \frac{3}{2}\right]$  مع  $(f'(x) < 0)$  ;  $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ .

$$g(0) \times g\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \left( \frac{-25 + 4\sqrt{10}}{10} \right) \approx 2 \times (-1,74) < 0$$

ومنه: يوجد عدد وحيد  $\alpha \in \left]0; \frac{3}{2}\right[$  حيث  $g(\alpha) = 0$  أي  $f(\alpha) - \alpha = 0$  أي  $f(\alpha) = \alpha$

و بالتالي المعادلة:  $f(x) = x$  ;  $x \in ]-1; +\infty[$  تقبل حل وحيد  $\alpha$  حيث  $0 < \alpha < \frac{3}{2}$

خلاصة: المعادلة:  $f(x) = x$  ;  $x \in ]-1; +\infty[$  تقبل حل وحيد  $\alpha$  حيث  $0 < \alpha < \frac{3}{2}$ .

04. أنشئ المنحنى الممثل للدالة  $f$  والمستقيم  $(\Delta)$  و المماس (T) في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

(أنظر آخر التمرين)

05. ...

أ- نبين أن  $f$  تحقق تقابل من  $]-1; +\infty[$  إلى مجال  $J$  يتم تحدهه نضع  $f^{-1}$  الدالة العكسية ل  $f$ .

• الدالة  $f$  هي متصلة على  $]-1; +\infty[$  (لأنها مجموع دالتين متصلتين).

• الدالة  $f$  تناقصية قطعاً على  $]-1; +\infty[$ .

• ومنه: الدالة  $f$  تقابل من  $]-1; +\infty[$  إلى  $J = f(]-1; +\infty[) = \mathbb{R}$

ب- نبين أن:  $f^{-1}$  قابلة للاشتقاق على  $J$ .

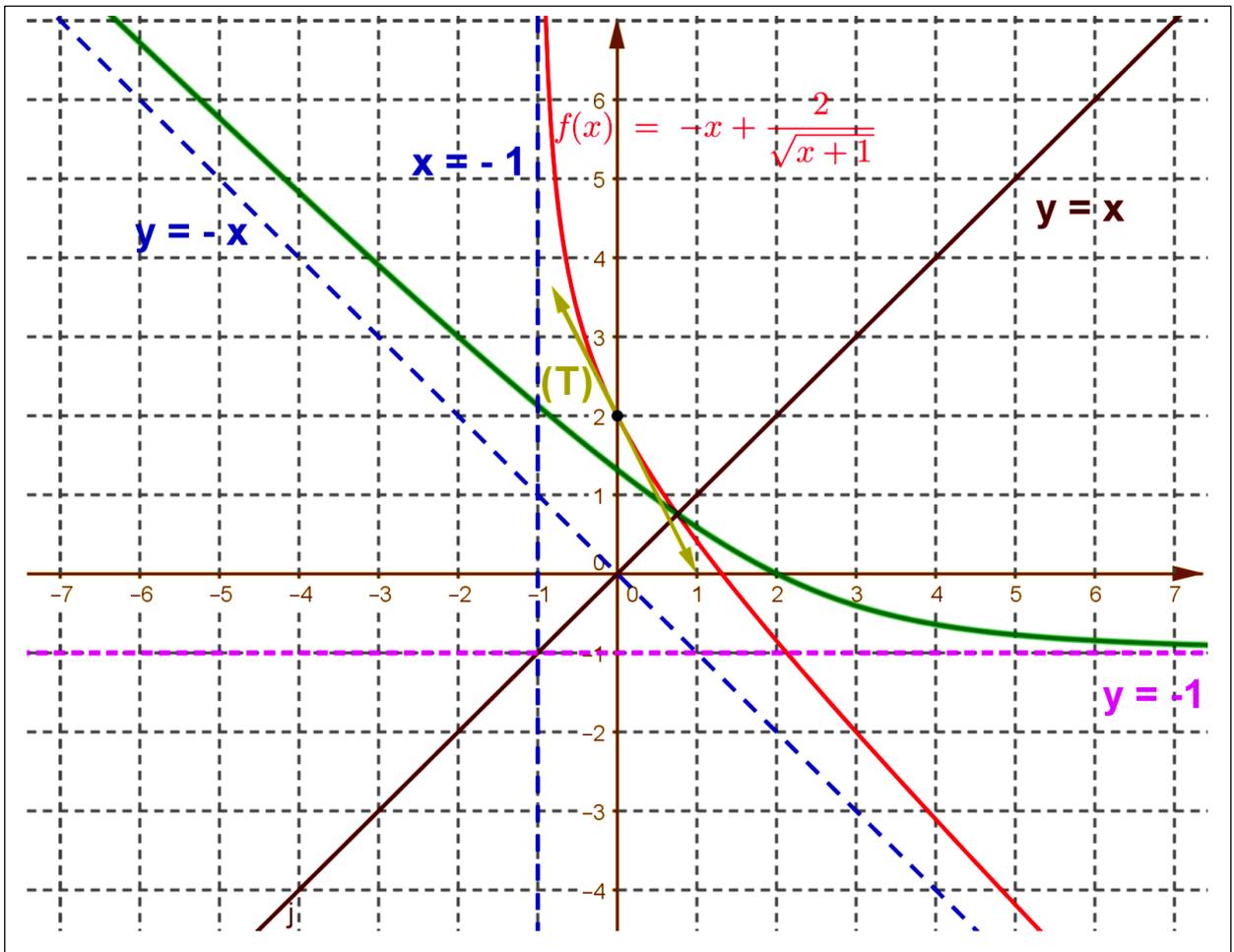


لدينا : الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]-1; +\infty[$  و دالتها المشتقة  $f'(x) < 0$  على  $]-1; +\infty[$  إذن  $f'(x) \neq 0$  و بالتالي الدالة العكسية  $f^{-1}$  قابلة للاشتقاق على  $f(I) = J$ .

ج نحسب بدلالة  $\alpha$  :  $(f^{-1})'(\alpha)$ .

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(\alpha) &= \frac{1}{f'(f(\alpha))} \\ &= \frac{1}{f'(\alpha)} \quad ; \quad (f(\alpha) = \alpha) \text{ لدينا} \\ &= \frac{1}{-1 - 2 \times \frac{1}{\sqrt{\alpha+1}} \times \frac{1}{\alpha+1}} \\ &= -\frac{(\alpha+1)\sqrt{\alpha+1}}{(\alpha+1)\sqrt{\alpha+1} + 2}\end{aligned}$$

د ثم أنشئ المنحنى الممثل للدالة العكسية  $f^{-1}$  في نفس المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (بلون آخر).





لنعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $B$  :  

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-x}{2x+1} & ; x \geq 0 \\ f(x) = -x + \sqrt{x^2 - x} & ; x < 0 \end{cases}$$
 (C) منحنى  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

01.

أ- نتحقق أن : مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي  $D = \mathbb{R}$ .

• الدالة  $x \mapsto \frac{-x}{2x+1}$  معرفة على  $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$  إذن الدالة  $f$  معرفة على  $D_1 = [0; +\infty[$ .

• الدالة  $x \mapsto -x + \sqrt{x^2 - x}$  معرفة لكل  $x$  حيث  $x^2 - x = x(x-1) \geq 0$  أي على  $D_2 = ]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$ .

• ومنه الدالة  $f$  معرفة على  $D_f = D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}$ .

خلاصة : الدالة  $f$  معرفة على  $D_f = \mathbb{R}$ .

ب- نحسب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ثم أعط تأويل هندسي للنتيجة الأولى.

• لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$  ومنه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ .

• التأويل الهندسي للنتيجة : منحنى الدالة  $f$  يقبل مقارب أفقي هو المستقيم ذو المعادلة  $y = -\frac{1}{2}$ .

• لدينا :  $\left( \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x} = +\infty \right)$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \sqrt{x^2 - x} = +\infty$  ومنه :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

ج- ندرس الفرع اللانهائي ل (C) بجوار  $-\infty$ .

• بما أن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  إذن المنحنى (C) يقبل فرع اللانهائي بجوار  $-\infty$ .

• نحدد  $a$  :

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + \sqrt{x^2 - x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - x \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{x} \quad ; (|x| = -x ; x \rightarrow -\infty) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = -2 \end{aligned}$$

ومنه :  $a = -2$

• نحدد  $b$  :

لدينا :



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-2x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \sqrt{x^2 - x} + 2x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (x^2 - x)}{x - \sqrt{x^2 - x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x - |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} ; (|x| = x ; x \rightarrow -\infty) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} + \cancel{x} \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ومنه :  $b = \frac{1}{2}$

**خلاصة:** منحنى الدالة  $f$  يقبل مقارب مائل هو المستقيم ذو المعادلة  $y = -2x + \frac{1}{2}$ .

**د-** أدرس اتصال الدالة  $f$  في النقطة  $x_0 = 0$ .

- اشتقاق الدالة  $f$  على يمين النقطة  $x_0 = 0$ .
- لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{(2x+1)} = -1 \in \mathbb{R}$$

• التأويل الهندسي للنتيجة : منحنى الدالة  $f$  يقبل نصف مماس على يمين النقطة  $x_0 = 0$  معامل الموجه هو  $-\frac{1}{2}$ .

- اشتقاق الدالة  $f$  على يسار النقطة  $x_0 = 0$ .
- لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x + \sqrt{x^2 - x} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x + |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{x}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - \sqrt{1-x}}{x} ; (|x| = -x ; x \rightarrow 0^-) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 - \sqrt{1-\frac{1}{x}} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

ومنه الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق على يسار النقطة  $x_0 = 0$

• التأويل الهندسي للنتيجة: منحنى الدالة  $f$  يقبل نصف مماس على يسار النقطة  $x_0 = 0$  موازي لمحو الأرتيب.

• أدرس اشتقاق الدالة  $f$  في النقطة  $x_0 = 0$ .

• بما أن الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق على يسار النقطة  $x_0 = 0$  فإن الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق في النقطة  $x_0 = 0$ .

• التأويل الهندسي للنتيجة: منحنى الدالة  $f$  يقبل نقطة مزواة النقطة  $x_0 = 0$

...02

أ- نبين أن: الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$  ثم أحسب الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$  على  $]0, +\infty[$  ثم حدد إشارتها.

• لدينا: الدالة  $x \mapsto \frac{-x}{2x+1}$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$  إذن الدالة  $f$  معرفة على  $]0, +\infty[$ .

• لدينا:  $f'(x) = \left[ \frac{-x}{2x+1} \right]' = \frac{-1}{(2x+1)^2} < 0$  ومنه:  $f'(x) < 0$  على  $]0, +\infty[$

ب- نبين أن: الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $] -\infty, 0[$  ثم أحسب الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$  على  $] -\infty, 0[$  ثم تحقق أن

$$\forall x \in ] -\infty, 0[ ; f'(x) = -1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

• الدالة  $x \mapsto x^2 - x$  قابلة للاشتقاق و موجبة على  $]1, +\infty[ \cup ]-\infty; 0[$  إذن الدالة  $x \mapsto -x + \sqrt{x^2-x}$  قابلة للاشتقاق على

$] -\infty; 0[ \cup ]1, +\infty[$  إذن الدالة  $f$  معرفة على  $] -\infty; 0[$ .

• لدينا:  $f'(x) = \left[ -x + \sqrt{x^2-x} \right]' = -1 + \frac{(x^2-x)'}{2\sqrt{x^2-x}} = -1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} < 0 ; (x < 0 \Rightarrow 2x-1 < -1)$

ومنه:  $f'(x) < 0$  على  $] -\infty; 0[$

ج- نضع جدول لتغيرات الدالة  $f$  في  $\mathbb{R}$ .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	$-\infty$	-
$f(x)$	$+\infty$	↙ 0 ↘	$-\frac{1}{2}$



03. نعتبر  $g$  قصور الدالة  $f$  على  $I = ]-\infty, 0[$ .

أ- بين أن  $g$  تقابل من  $I$  إلى مجال  $J$  يتم تحدهه نضع  $g^{-1}$  الدالة العكسية ل  $g$  لدينا :

• الدالة  $f$  متصلة و تناقصية قطعاً على  $I = ]-\infty, 0[$  إذن قصورها متصلة و تناقصية قطعاً على  $I = ]-\infty, 0[$  و بالتالي :  $g$  تقابل

من  $I$  إلى مجال مع  $J = f(I) = f(]-\infty, 0[) = ]0; +\infty[$

**خلاصة :**  $g$  تقابل من  $I = ]-\infty, 0[$  إلى  $J = ]0; +\infty[$

ب- أحسب :  $g^{-1}(1)$  ثم  $(g^{-1})'(1)$ .

• نحسب  $g^{-1}(1)$

نضع :  $g^{-1}(1) = y$  مع  $y \in I = ]-\infty, 0[$

$$g^{-1}(1) = y \Leftrightarrow g(g^{-1}(1)) = g(y)$$

$$\Leftrightarrow g \circ g^{-1}(1) = f(y)$$

$$\Leftrightarrow 1 = -y + \sqrt{y^2 - y}$$

$$\Leftrightarrow 1 + y = \sqrt{y^2 - y}$$

$$\Leftrightarrow (1 + y)^2 = y^2 - y \quad (1 + y \geq 0 \Rightarrow y \in [-1; 0[)$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 = y^2 - y$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{3} \in [-1; 0[$$

ومنه :  $g^{-1}(1) = -\frac{1}{3} \in I = ]-\infty, 0[$

**خلاصة :**  $g^{-1}(1) = -\frac{1}{3}$

• نحسب  $(g^{-1})'(1)$

$$(g^{-1})'(1) = \frac{1}{g' \circ g^{-1}(1)} = \frac{1}{g'(g^{-1}(1))}$$

$$= \frac{1}{g'\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{1}{f'\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

لدينا :

$$= \frac{1}{\left(-1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}\right)_{x=-\frac{1}{3}}} = -\frac{9}{4}$$



خلاصة:  $(g^{-1})'(1) = -\frac{9}{4}$

ج- نحدد الدالة العكسية  $f^{-1}$ .

نعتبر  $x \in I = ]-\infty, 0[$  و  $y \in J = ]0; +\infty[$

ومنه:

$$g(x) = y \Leftrightarrow -x + \sqrt{x^2 - x} = y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x} = y + x \quad ; (y + x \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = (y + x)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = y^2 + x^2 + 2xy$$

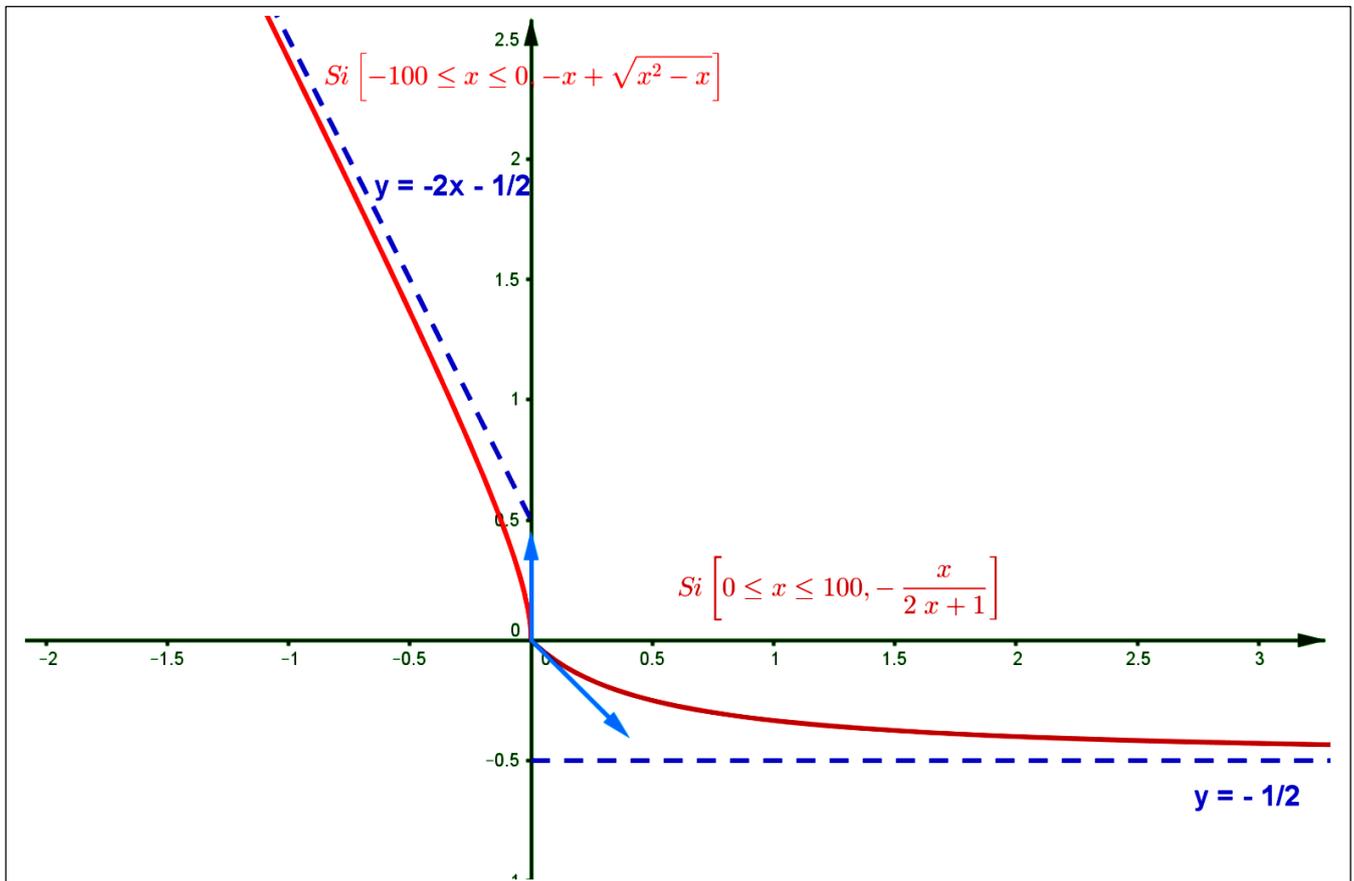
$$\Leftrightarrow -x(1 + 2y) = y^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-y^2}{1 + 2y} \in I = ]-\infty, 0[ \quad ; (y \in J = ]0; +\infty[ \Rightarrow 1 + 2y > 0)$$

$$g^{-1} : J = ]0; +\infty[ \rightarrow I = ]-\infty, 0[$$

خلاصة: الدالة العكسية معرفة كما يلي:  $x \mapsto g^{-1}(x) = \frac{-x^2}{1 + 2x}$

04. أنشئ المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ثم أنشئ المنحنى الممثل للدالة العكسية  $g^{-1}$  في نفس المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (بلون آخر)





لنعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \cos x - \sin^2 x$ . (C) منحنى  $f$  في معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  مع  $\|\vec{i}\| = 1$  و  $\|\vec{j}\| = 4$  (cm بالسنتيمتر)

**01.** ندرس زوجية الدالة  $f$ .

- لدينا لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  من  $D_f = \mathbb{R}$  كذلك  $-x$  من  $\mathbb{R}$ .
- ليكن  $x$  من  $\mathbb{R}$  من  $D_f = \mathbb{R}$  لدينا:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-x) - \sin^2(-x) \\ &= \cos x - (-\sin x)^2 \\ &= \cos x - \sin^2 x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ومنه:  $f(-x) = f(x)$

**خلاصة:** الدالة زوجية على  $\mathbb{R}$ .

**02.** نبين أن: الدالة  $f$  دورية ودورها  $2\pi$  ثم استنتج  $D_E$  مجموعة دراسة الدالة  $f$ .

- نبين أن الدالة  $f$  دورية ودورها  $2\pi$  ثم
- لدينا لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  من  $D_f = \mathbb{R}$  كذلك  $x+2\pi$  من  $\mathbb{R}$  و  $x-2\pi$  من  $\mathbb{R}$
- ليكن  $x$  من  $\mathbb{R}$  من  $D_f = \mathbb{R}$  لدينا:

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \cos(x+2\pi) - \sin^2(x+2\pi) \\ &= \cos x - \sin^2 x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ومنه:  $f(x+2\pi) = f(x)$

**خلاصة:** الدالة  $f$  دورية ودورها  $2\pi$ .

- مجموعة دراسة الدالة  $f$
- بما أن الدالة  $f$  دورية ودورها  $2\pi$  ندرسها على مجال سعته  $2\pi$  مثلا على  $[-\pi; \pi]$ .
- بما أن الدالة  $f$  زوجية ندرسها على  $[-\pi; \pi] \cap \mathbb{R}^+ = [0; \pi]$

**خلاصة:** مجموعة دراسة الدالة  $f$  هي  $D_E = [0; \pi]$ .

**03.** نتحقق أن:  $f'(x) = -2\sin x \left( \cos x + \frac{1}{2} \right)$ ,  $x \in [0, \pi]$ .

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\cos x - \sin^2 x]' \\ &= -\sin x - 2(\sin x)' \sin x \\ &= -\sin x - 2\cos x \sin x \end{aligned}$$



$$= -2 \sin x \left( \cos x + \frac{1}{2} \right)$$

**04.** ندرس إشارة  $f'$  على  $[0, \pi]$  ثم ضع جدول لتغيرات الدالة  $f$  على  $[0, \pi]$ .

❖ إشارة  $f'$  على  $[0, \pi]$

- لدينا : على المجال  $[0; \pi]$  الدالة  $x \mapsto \cos x$  تناقصية  
ومنه :

$$x \geq \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \cos x \leq \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \cos x \leq -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \cos x + 1 \leq 0$$

على المجال  $\left[ \frac{2\pi}{3}; 2\pi \right]$  لدينا :  $2 \cos x + 1 \leq 0$  . على المجال  $\left[ 0; \frac{2\pi}{3} \right]$  لدينا :  $2 \cos x + 1 \geq 0$  .

- على المجال  $[0; \pi]$  الدالة  $x \mapsto \sin x$  موجبة

إذن إشارة  $f'$  على  $[0, \pi]$  بواسطة الجدول التالي : ثم جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $D_E = [0; \pi]$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$		
$-\sin x$	0	-	-	0	
$2 \cos x + 1$		+	0	-	
$f'(x)$	0	-	0	+	0
$f(x)$	1			-1	
		↘	↗		
			$-\frac{5}{4}$		

**05.** نبين أن :  $g$  قصور  $f$  على  $\left[ 0; \frac{2\pi}{3} \right]$  تحقق تقابل من  $\left[ 0; \frac{2\pi}{3} \right]$  إلى  $J$  يتم تحدهه نرمر لتقابلها العكسي ب  $g^{-1}$  .

- الدالة  $f$  متصلة و تناقصية قطعاً على  $I = \left[ 0; \frac{2\pi}{3} \right]$  إذن قصورها متصلة و تناقصية قطعاً على  $I = \left[ 0; \frac{2\pi}{3} \right]$  و بالتالي :  $g$  تقابل

$$J = f(I) = f\left(\left[ 0; \frac{2\pi}{3} \right]\right) = \left[ -\frac{5}{4}; 1 \right] \text{ مع } I \text{ إلى مجال}$$

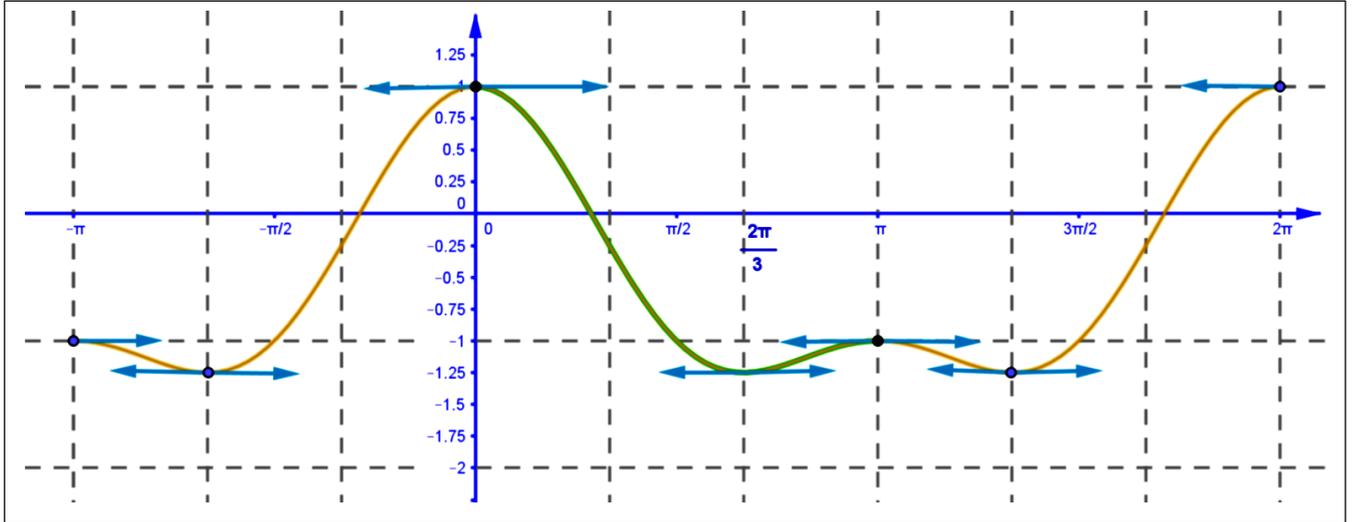
**خلاصة :**  $g$  تقابل من  $I = \left[ 0; \frac{2\pi}{3} \right]$  إلى  $J = \left[ -\frac{5}{4}; 1 \right]$

**06.** ننشئ  $(C_f)$  منحنى  $f$  في  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  و ذلك على  $D_E$  ( بلون أخضر )

أنظر الشكل أسفله .



**07.** نتعم إنشاء  $(C_f)$  منحنى  $f$  على  $[-\pi, 2\pi]$  في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (بلون 'أخر') ثم  $(C_{g^{-1}})$  منحنى الدالة  $g^{-1}$  في نفس المعلم (بلون أخضر متقطع).  
أنظر الشكل أسفله.



**04.** تمرين إضافي (في المنزل)

لنعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $[0, +\infty[$  ب:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} ; x \in [0; 1[ \cup ]1; +\infty[ \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(C) منحنى  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

**01.** ...  
أ- نحسب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم أعط تأويل هندسي للنتيجة.  
لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{(\cancel{\sqrt{x}-1})(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

خلاصة:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

• التأويل الهندسي للنتيجة: منحنى الدالة  $f$  يقبل مقارب أفقي هو المستقيم ذو المعادلة  $y = 0$ .



ب- ندرس اتصال الدالة  $f$  في النقطة  $x_0 = 1$ .  
لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{(\cancel{\sqrt{x}-1})(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ولدينا :  $f(1) = \frac{1}{2}$  و بالتالي :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2} = f(1)$

خلاصة : الدالة  $f$  متصلة في النقطة  $x_0 = 1$ .

ج- ندرس اتصال الدالة  $f$  على يمين النقطة  $x_0 = 0$ .  
لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \\ &= \frac{-1}{-1} \\ &= 1\end{aligned}$$

ولدينا :  $f(0) = 1$  و بالتالي :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0)$

خلاصة : الدالة  $f$  متصلة على يمين النقطة  $x_0 = 0$ .

...02

أ- نبين أن الدالة  $f$  قابلة الاشتقاق في  $x_0 = 1$  و تحقق أن  $f'(1) = -\frac{1}{8}$ .  
لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{1}{2}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x+2\sqrt{x}-1}{2(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\cancel{(\sqrt{x}-1)^2}}{2(\cancel{\sqrt{x}-1})^2(\sqrt{x}+1)^2}\end{aligned}$$



$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{2(\sqrt{x}+1)^2} = -\frac{1}{8}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{1}{8} \in \mathbb{R} \text{ ومنه :}$$

**إذن :** الدالة  $f$  قابلة الاشتقاق في  $x_0 = 1$  وتحقق أن  $f'(1) = -\frac{1}{8}$ .

**بـ** نجد معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C) في  $x_0 = 1$ .  
المعادلة هي :

$$\begin{aligned} y &= (x-x_0)f'(x_0)-f(x_0)(x_0=1) \\ &= (x-1)f'(1)-f(1) \\ &= (x-1)\left(-\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{8}x-\frac{3}{8} \end{aligned}$$

**خلاصة :** معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C) في  $x_0 = 1$  هي  $y = -\frac{1}{8}x - \frac{3}{8}$ .

...03

**أـ** هل الدالة  $f$  قابلة الاشتقاق على يمين  $x_0 = 0$  ثم أعط تأويل هندسي للنتيجة المحصل عليها .  
ندرس اشتقاق الدالة  $f$  على يمين  $x_0 = 0$ .  
لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}-1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}-x}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{x(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}^2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \end{aligned}$$

$$; \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) = 0^+ \right)$$

$$= -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty \notin \mathbb{R} \text{ ومنه :}$$

**خلاصة:** الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق على يمين  $x_0 = 0$ .

**التأويل الهندسي للنتيجة:** منحنى الدالة  $f$  يقبل نصف مماس على يمين النقطة  $x_0 = 0$  موازي لمحور الأرتاب

**ج:** بين أن: الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[ \setminus \{1\}$  ثم أحسب الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$  على  $]0, +\infty[ \setminus \{1\}$  ثم تحقق أن

$$f'(x) = \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(x-1)^2} \quad \forall x \in ]0, +\infty[ \setminus \{1\} \text{ ثم ضع جدول لتغيرات الدالة } f \text{ على } ]0, +\infty[.$$

❖ الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[ \setminus \{1\}$ .

- الدالة  $x \mapsto \frac{1}{x-1}$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  إذن قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[ \setminus \{1\}$ .
- الدالة  $x \mapsto \sqrt{x}-1$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$  إذن قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[ \setminus \{1\}$ .
- ومنه الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[ \setminus \{1\}$  (لأنها خارج دالتين قابلتين للاشتقاق)

❖ نحسب الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$  على  $]0, +\infty[ \setminus \{1\}$  ثم تحقق.  
لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[ \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \right]' = \frac{(\sqrt{x}-1)'(x-1) - (\sqrt{x}-1)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) - (\sqrt{x}-1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1) - 2x + 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x-1)^2} \\ &= \frac{-x + 2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} \\ &= \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(x-1)^2} < 0 \end{aligned}$$

❖ نضع جدول لتغيرات الدالة  $f$  على  $]0, +\infty[$ .

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-
$f(x)$	1	0

**د:** بين أن  $f$  تحقق تقابل من  $]0, +\infty[$  إلى مجال  $J$  يتم تحدهه نضع  $f^{-1}$  الدالة العكسية ل  $f$ .

لدينا:

- الدالة  $f$  متصلة و تناقصية قطعاً على  $I = ]0, +\infty[$  و بالتالي:  $f$  تقابل من  $I$  إلى مجال مع  $J = f(I) = f(]0, +\infty[) = ]0; 1[$



خلاصة:  $f$  تقابل من  $I = [0, +\infty[$  إلى  $J = ]0; 1]$

04. ننشئ المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ثم أنشئ المنحنى الممثل للدالة العكسية  $f^{-1}$  في نفس المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

