الأعداد العقدية

I) عموميات:

1) تعريف:

نقبل الخاصية التالية:

توجد مجموعة نرمز لها ب $\mathbb{C}$ تحتوي على $\mathbb{R}$ $(\mathbb{R}\subset\mathbb{C})$ وتحقق ما يلي:

1) تحتوي المجموعة $\mathbb{C}$ على عنصر غير حقيقي نرمز له ب i ويحقق $i^2=-1$

2) كل عنصر z من $\mathbb{C}$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل: $z=a+ib$ مع $a;b\in\mathbb{R}$

3) المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بعملتي الجمع والضرب اللتان تمددان عمليتي الجمع والضرب في $\mathbb{R}$ ولهما نفس الخاصيات.

ملاحظات:

*) $\mathbb{C}=\left\{z=a+ib/a;b\in\mathbb{R};i^2=-1\right\}$.

*) $\mathbb{C}$ تسمى مجموعة الأعداد العقدية وكل عنصر من $\mathbb{C}$ يسمى عدد عقدي.

*) ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ مع aو b من $\mathbb{R}$.

هذه الكتابة تسمى الشكل الجبري للعدد z.

العدد a يسمى الجزء الحقيقي ل z. نكتب $Ré(z)=a$.

العدد b يسمى الجزء التخيلي ل z. نكتب $\mathrm{Im}(z)=b$.

إذا كان $b=0$ فإن $z=a\in\mathbb{R}$

إذا كان $a=0$ فإن $z=ib$ ونقول z تخيلي صرف: $z\in i\mathbb{R}$.

أمثلة:

*) $z=2-3i$ لدينا $Ré(z)=2$ و $\mathrm{Im}(z)=-3$

*) $z=-4i$ $Ré(z)=0$ و $\mathrm{Im}(z)=-4$

لدينا $z\in i\mathbb{R}$.

2) قواعد الحساب في $\mathbb{C}$.

a) تساوي عددين عقديين:

ليكن $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ من $\mathbb{C}$

بما أن كل عدد عقدي يكتب بطريقة وحيدة على شكله الجبري.

فإن: $z=z'\Leftrightarrow a=a';b=b'$.

لدينا $\begin{cases}z=a+ib\\0=0+i0\end{cases}$ من $z=0\Leftrightarrow a=0;b=0$

خاصية:

ليكن aو bو a'و b' من $\mathbb{R}$ لدينا:

*) $a+ib=a'+ib'\Leftrightarrow a=a';b=b'$ هذا يعني:

$$z=z'\Leftrightarrow\begin{cases}Ré(z)=Ré(z')\\\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')\end{cases}$$

*) $a+ib=0\Leftrightarrow a=0;b=0$

هذا يعني: $z=0\Leftrightarrow\begin{cases}Ré(z)=0\\\mathrm{Im}(z)=0\end{cases}$

b) بنية $(\mathbb{C},+,\times)$

*) الجمع تجميعي وتبادلي في $\mathbb{C}$.

*) الجمع يقبل عنصرا محايدا هو 0: $0+z=z+0=z$

*) كل عنصر z من $\mathbb{C}$ يقبل مقابلا نرمز له ب $-z$: $z+(-z)=(-z)+z=0$.

*) نلخص الخاصيات السابقة بقولنا $(\mathbb{C},+)$ زمرة تبادلية.

*) الضرب تجميعي وتبادلي في $\mathbb{C}$.

*) الضرب توزيعي بالنسبة للجمع: $z(z'+z'')=zz'+zz''$

← نلخص الخاصيات السابقة بقولنا:

$(\mathbb{C},+,\times)$ حلقة تبادلية.

*) العدد 1 هو العنصر المحايد في $\mathbb{C}$ بالنسبة للضرب.

*) كل عنصر من $\mathbb{C}^*$ يقبل مقلوبا نرمز له ب $\frac{1}{z}$ أو z^{-1}

$\frac{1}{z}\times z=z\times\frac{1}{z}=1$.

← نلخص كل الخاصيات السابقة بقولنا: $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي.

خاصية: $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي.

c) الجمع والضرب في $\mathbb{C}$:

ليكن $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ من $\mathbb{C}$ مع a,b,a',b'.

*) لدينا: $z+z'=(a+ib)+(a'+ib')$

$$=a+ib+a'+ib'$$
$$=a+a'+ib+ib'$$
$$=a+a'+i(b+b')$$

*) لدينا: $zz'=(a+ib)(a'+ib')$

$$=aa'+ib'a+iba'-bb'$$
$$=(aa'-bb')+i(b'a+ba')$$

خاصية:

ليكن aو bو a'و b' من $\mathbb{R}$. لدينا:

*) $(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')$

*) $(a+ib)(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+ba')$

d) مقابل ومقلوب عدد عقدي:

*) ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$.

لنبحث عن z' بحيث $z+z'=0$

نضع $z'=a'+ib'$

$$z+z'=0\Leftrightarrow(a+a')+i(b+b')=0$$

لدينا: $\Leftrightarrow\begin{cases}a+a'=0\\b+b'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a'=-a\\b'=-b\end{cases}$

إذن: $z'=-a+i(-b)$

إذن $\boxed{\text{مقابل } z=a+ib \text{ هو: } -z=-a+i(-b)}$

*) ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}^*$

لنبحث عن z' بحيث $zz'=1$

نضع $z'=a'+ib'$

$$zz'=1\Leftrightarrow(aa'-bb')+i(ab'+ba')=1$$

لدينا: $\Leftrightarrow\begin{cases}aa'-bb'=1\\ba'+b'a=0\end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}a&-b\\b&a\end{vmatrix}=a^2+b^2$$

ولدينا $z\in\mathbb{C}^*$ إذن $a\neq0$ أو $b^2\neq0$

إذن $a^2\rangle0$ أو $b^2\rangle0$ إذن $\Delta\neq0$

$$\Delta^*_{a'} = \begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix} = a \qquad \Delta_{b'} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b$$

إذن $a' = \dfrac{a}{a^2+b^2}$; $b' = \dfrac{-b}{a^2+b^2}$

إذن: $z' = \dfrac{a}{a^2+b^2} + i\dfrac{-b}{a^2+b^2}$

إذن مقلوب $z = a+ib$ هو: $\boxed{\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + i\dfrac{-b}{a^2+b^2}}$

ملاحظة:

عمليا للحصول على مقلوب عدد عقدي يتبع ما يلي:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2-(ib)^2}$$
$$= \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

e) متطابقات هامة:

جميع المتطابقات الهامة التي نعرفها في $\mathbb{R}$ تبقى صحيحة في $\mathbb{C}$.

f) قوى العدد i:

لدينا: $i^2 = -1$ $\qquad i^3 = i^2.i = -i$

$i^4 = i^2.i^2 = 1$

$i^5 = i^4.i = i$

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

*) إذا كان $n = 4k$: $\quad i^n = i^{4k} = (i^4)^k = 1$

*) إذا كان $n = 4k+1$: $\quad i^n = i^{4k+1} = i^{4k}.i = i$

*) إذا كان $n = 4k+2$: $\quad i^n = i^{4k+2} = i^{4k}.i^2 = -1$

*) إذا كان $n = 4k+3$: $\quad i^n = i^{4k+3} = i^{4k}.i^3 = -i$

إذن: $i^n = \begin{cases} 1; & n = 4k \\ i; & n = 4k+1 \\ -1; & n = 4k+2 \\ -i; & n = 4k+3 \end{cases}$

تمرين تطبيقي:

*)حساب:

$$z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100} = \left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{50}$$
$$= \left(\frac{(1+i)^2}{2}\right)^{50} = \left(\frac{2i}{2}\right)^{50} = i^{50} = i^{4\times12+2}$$
$$= (i^4)^{12} \times i^2 = -1$$

ملاحظة:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100} = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$$

$\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} \neq -\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ و $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} \neq \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$

$u^n = v^n \not\Rightarrow u = v$ أو $u = -v$

II) مرافق عدد عقدي:

1) تعريف.

ليكن $z = a+ib$ من $\mathbb{C}$ مع a و b من $\mathbb{R}$.
نسمي مرافق العدد z العدد الذي نرمز له ب $\bar{z}$ المعرف بما يلي:
$\bar{z} = a-ib$.

أمثلة:

*) $z = 2-4i \qquad \bar{z} = 2+4i$

*) $z = -1-i \qquad \bar{z} = -1+i$

*) $z = 2i-4 \qquad \bar{z} = -2i-4$

*) $z = 5 \qquad \bar{z} = 5$

*) $z = 2i \qquad \bar{z} = -2i$

2) خاصيات:

1- ليكن $z = a+ib$ من $\mathbb{C}$ مع a و b من $\mathbb{R}$.

*) $\bar{z} = a-ib$

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow a+ib = a-ib$$
$$\Leftrightarrow 2ib = 0 \Leftrightarrow 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0$$
$$\Leftrightarrow z = a$$
$$\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

*) ولدينا:

$$\bar{z} = -z \Leftrightarrow a-ib = -a-ib$$
$$\Leftrightarrow 2a = 0$$
$$\Leftrightarrow a = 0$$
$$\Leftrightarrow z = ib$$
$$\Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

إذن $\boxed{\begin{array}{l} z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \\ z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} \end{array}}$

2) $\boxed{\bar{\bar{z}} = z \quad ; \quad z = z' \Leftrightarrow \bar{z} = \bar{z}'}$

3) ليكن $z = a+ib$ و $z' = a'+ib'$ من $\mathbb{C}$

لدينا: $z+z' = (a+a')+i(b+b')$

إذن:

$$\overline{z+z'} = (a+a')-i(b+b')$$
$$= a-ib+a'-ib'$$
$$= \bar{z}+\bar{z}'$$

إذن $\boxed{\begin{array}{l} \overline{z+z'} = \bar{z}+\bar{z}' \\ \text{و: } \overline{z_1+z_2+....+z_n} = \bar{z}_1+\bar{z}_2+....+\bar{z}_n \end{array}}$

4) ليكن $z = x+iy$ من $\mathbb{C}$ مع x و y من $\mathbb{R}$

لدينا: $\bar{z} = x-iy$

$$\boxed{\begin{array}{ll} z+\bar{z} = 2x & = 2R\acute{e}(z) \\ z-\bar{z} = 2iy & = 2i\,\mathrm{Im}(z) \\ z.\bar{z} = x^2+y^2 & \end{array}}$$

5) ليكن $z = a+ib$ و $z' = a'+ib'$ من $\mathbb{C}$ مع a,b,a',b' من $\mathbb{R}$.

لدينا:

$$z.z' = (aa'-bb')+i(ab'+ba')$$

إذن $\overline{zz'} = (aa'-bb')-i(ab'+ba')$

ولدينا:

$$\bar{z}.\bar{z}' = (a-ib)(a'-ib')$$
$$= aa'-ib'a-iba'-bb'$$
$$= (aa'-bb')-i(ab'+ba')$$

إذن: $\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z}'$

إذن:

$$\boxed{\begin{array}{l}\overline{z.z'}=\bar{z}.\bar{z}'\\ \overline{z_1.z_2......z_n}=\bar{z}_1.\bar{z}_2......\bar{z}_n\\ \overline{z^n}=\left(\bar{z}\right)^n\ \left(n\in\mathbb{N}\right)\end{array}}$$

6) ليكن z و z' من $\mathbb{C}$ بحيث $z'\neq 0$

لدينا: $\frac{z}{z'}.z'=z$

إذن: $\overline{\frac{z}{z'}.z'}=\bar{z}$

يعني: $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}.\bar{z}'=\bar{z}$

إذن: $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}\\ \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\bar{z}'}\end{array}}$$

7) نعتبر الحدودية

$$P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+....+a_1z+a_0$$

حيث المعاملات a_i حقيقية. $(a\in\mathbb{R})$.

نفترض أن α حل للمعادلة $p(z)=0$ $(\alpha\in\mathbb{C})$

لنبين أن $\bar{\alpha}$ حل للمعادلة $P(z)=0$ يعني $P(\bar{\alpha})=0$

لدينا α حل ل $P(z)=0$ يعني: $P(\alpha)=0$

يعني: $a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+...+a_1\alpha+a_0=0$

يعني: $\overline{a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+...+a_1\alpha+a_0}=\bar{0}$

يعني: $\overline{a_n}\,\overline{\alpha^n}+\overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha^{n-1}}+...+\overline{a_1}\,\overline{\alpha}+\overline{a_0}=0$

ولدينا $a_i\in\mathbb{R}$ إذن $\overline{a_i}=a_i$

ومنه: $a_n\bar{\alpha}^n+a_{n-1}\bar{\alpha}^{n-1}+...+a_1\bar{\alpha}+a_0=0$

يعني: $P(\bar{\alpha})=0$

إذن $\bar{\alpha}$ حل للمعادلة $P(z)=0$.

خاصية:

لتكن $P(z)$ حدودية معاملاتها حقيقية.
إذا كان α حلا للمعادلة $P(z)=0$ فإن $\bar{\alpha}$ حل ل $P(z)=0$.

تمارين تطبيقية:

تمرين1

نعتبر العددين:

$$u=(a+2i)^n+(a-2i)^n\ ,\ v=(a+2i)^n-(a-2i)^n$$

حيث $a\in\mathbb{R}$

* بين أن u حقيقي و v تخيلي صرف:

لدينا:

$$\begin{aligned}\bar{u}&=\overline{(a+2i)^n+(a-2i)^n}\\&=\overline{(a+2i)^n}+\overline{(a-2i)^n}\\&=\left(\overline{a+2i}\right)^n+\left(\overline{a-2i}\right)^n\\&=(a-2i)^n+(a+2i)^n\qquad (a\in\mathbb{R})\\&=u\end{aligned}$$

$u=\bar{u}$ إذن $u\in\mathbb{R}$

طريقة أخرى:

$$\begin{aligned}u&=(a+2i)^n+(a-2i)^n\\&=(a+2i)^n+\left(\overline{a+2i}\right)^n\\&=(a+2i)^n+\overline{(a+2i)^n}=2R\acute{e}\left((a+2i)^n\right)\end{aligned}$$

إذن $u\in\mathbb{R}$

لدينا:

$$\begin{aligned}\bar{v}&=\overline{(a+2i)^n-(a-2i)^n}\\&=\left(\overline{a+2i}\right)^n-\left(\overline{a-2i}\right)^n\\&=(a-2i)^n-(a+2i)^n=-v\end{aligned}$$

$v=-\bar{v}$ إذن $v\in i\mathbb{R}$

طريقة (2):

$$\begin{aligned}v&=(a+2i)^n-(a-2i)^n\\&=(a+2i)^n-\left(\overline{a+2i}\right)^n\\&=(a+2i)^n-\overline{(a+2i)^n}=2i\,\mathrm{Im}\left((a+2i)^n\right)\end{aligned}$$

إذن $v\in i\mathbb{R}$

تمرين2

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية

1) $(1+i)z-2iz+1-i=3z-i$

2) $(1+i)z-(2i+1)\bar{z}+1-i=3z-i$

3) $iz\bar{z}-(2i+1)\bar{z}+2-i=1+i$

III- معيار عدد عقدي: Module d'un complexe

1- تعريف:

ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ مع a و b من $\mathbb{R}$
نسمي معيار العدد z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له ب $|z|$
والمعرف بما يلي: $|z|=\sqrt{z.\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$

أمثلة:

*) $z=1-i$: $|z|=\sqrt{2}$

*) $z=3+4i$: $|z|=5$

*) $z=-4$: $|z|=4$

*) $z=3$: $|z|=3$

*) $z=-5i$: $|z|=5$

ملاحظات:

*) $|z|\in\mathbb{R}^+$ $(\forall z\in\mathbb{C})$

*) إذا كان $z=a\in\mathbb{R}$ قيمة مطلقة $\to$ $|z|=\sqrt{a^2+0^2}=|a|$ $\to$ معيار.

*) إذا كان: $z=ib$ $(b\in\mathbb{R})$ $|z|=\sqrt{b^2}=|b|$

*) ليكن $z=x+iy$ مع x و y من $\mathbb{R}$

$$|z|^2=z.\bar{z}=x^2+y^2$$

*) $|z|^2\neq z^2$ لأن $z^2\in\mathbb{C}$ و $|z|^2\in\mathbb{R}^+$

*) ليكن z و z' من $\mathbb{C}$ بحيث $z'\neq 0$

لدينا: $\frac{z}{z'}=\frac{z\bar{z}'}{z'\bar{z}'}=\frac{z\bar{z}'}{|z'|^2}$

مثال:

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{|c+id|^2}$$
$$=\frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}$$

2) خاصيات:

1- ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$

لدينا $\begin{cases} a^2\le a^2+b^2 \\ b^2\le a^2+b^2 \end{cases}$ إذن $\begin{matrix} |a|\le\sqrt{a^2+b^2} \\ |b|\le\sqrt{a^2+b^2} \end{matrix}$

إذن $\begin{matrix} a\le|a|\le\sqrt{a^2+b^2} \\ b\le|b|\le\sqrt{a^2+b^2} \end{matrix}$

خاصية:

$$\boxed{\begin{matrix} R\acute{e}(z)\le|R\acute{e}(z)|\le|z| \\ \mathrm{Im}(z)\le|\mathrm{Im}(z)|\le|z| \end{matrix}}$$

2- ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$

$$|z|=0\Leftrightarrow|z|^2=0$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2=0\Leftrightarrow a^2=0 \text{ و } b^2=0$$
$$\Leftrightarrow a=0 \text{ و } b=0$$

خاصية:

$$\boxed{(\forall z\in\mathbb{C})\ |z|=0\Leftrightarrow z=0}$$

3- ليكن z و z' من $\mathbb{C}$

$$|zz'|^2=zz'.\overline{zz'}=zz'.\bar{z}.\bar{z}'$$
$$=z.\bar{z}.z'.\bar{z}'=|z|^2.|z'|^2$$
$$=(|z|.|z'|)^2$$

إذن: $|zz'|=|z|.|z'|$

خاصية:

$$\boxed{\begin{matrix} |z.z'|=|z|.|z'| \\ \left|\prod_{i=1}^{n}z_i\right|=\prod_{i=1}^{n}|z_i| \\ |z^n|=|z|^n\quad(n\in\mathbb{N}) \end{matrix}}$$

4- ليكن z و z' من $\mathbb{C}$ بحيث $z'\neq0$

$$\left|\frac{z}{z'}\right|^2=\left(\frac{z}{z'}\right)\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}$$
$$=\frac{z}{z'}.\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}=\frac{z\bar{z}}{z'\bar{z}'}=\frac{|z|^2}{|z'|^2}$$

إذن: $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$

خاصية:

$$\boxed{\begin{matrix} z \text{ و } z' \text{ من } \mathbb{C} \text{ بحيث } z'\neq0 \\ \left|\frac{1}{z'}\right|=\frac{1}{|z'|} \qquad \left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|} \end{matrix}}$$

5- ليكن z و z' من $\mathbb{C}$

لنبين أن $|z+z'|\le|z|+|z'|$

لدينا:

$$|z+z'|^2=(z+z').\left(\overline{z+z'}\right)$$
$$=(z+z').(\bar{z}+\bar{z}')$$
$$=z\bar{z}+z\bar{z}'+z'\bar{z}+z'\bar{z}'$$
$$=|z|^2+z\bar{z}'+z'\bar{z}+|z'|^2$$

لنبين أن $z\bar{z}'+z'\bar{z}\le2|z||z'|$

لدينا $z\bar{z}'+z'\bar{z}=z\bar{z}'+\overline{z\bar{z}'}=2R\acute{e}(z\bar{z}')$

ونعلم أن: $R\acute{e}(z\bar{z}')\le|z\bar{z}'|$

يعني: $2R\acute{e}(z\bar{z}')\le2|z\bar{z}'|$

$$z\bar{z}'+z'\bar{z}\le2|z||\bar{z}'|$$
$$|z|^2+|z'|^2+z\bar{z}'+z'\bar{z}\le|z|^2+|z'|^2+2|z||z'|$$

إذن: $|z+z'|^2\le(|z|+|z'|)^2$

خاصية: $\boxed{|z+z'|\le|z|+|z'|}$

تمارين تطبيقية:

تمرين 1 أحسب معيار العدد z في الحالات التالية :

*) $z=(1-i)^3\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100}$

لدينا:

$$|z|=\left|(1-i)^3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}\right|$$
$$=\left|(1-i)^3\right|\left|\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}\right|$$
$$=|1-3|^3\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|^{100}$$
$$=\sqrt{3}^2.1^{100}=2\sqrt{2}$$

*) $z=\dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\times i}{(3-4i)^2}$

$$|z|=\frac{\left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right|\times|i|}{\left|(3-4i)^2\right|}$$
$$=\frac{1^n.1}{25}=\frac{1}{25}$$

تمرين 2 ليكن $z\in\mathbb{C}-\left\{\frac{-i}{2}\right\}$

ونعتبر العدد $u=\dfrac{z+2i}{2z+i}$

بين أن: $|u|=1\Leftrightarrow|z|=1$

لدينا:

$$|u|=1 \Leftrightarrow |u|^2=1$$
$$\Leftrightarrow u.\bar{u}=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{z+2i}{2z+i}.\overline{\frac{z+2i}{2z+i}}=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{z+2i}{2z+i}.\frac{\bar{z}-2i}{2\bar{z}-i}=1$$
$$\Leftrightarrow (z+2i)(\bar{z}-2i)=(2z+i)(2\bar{z}-i)$$
$$\Leftrightarrow z\bar{z}-2iz+2i\bar{z}-4=4z\bar{z}-2iz+2i\bar{z}+1$$
$$\Leftrightarrow 3z\bar{z}=3$$
$$\Leftrightarrow z\bar{z}=1$$
$$\Leftrightarrow |z|^2=1$$
$$\Leftrightarrow |z|=1$$

IV- التمثيل الهندسي لعدد عقدي:

نفترض في كل ما يلي أن المستوى منسوب إلى م.م.م.م $(o,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

1- لحق نقطة: affixe d'un point

a) تعريف:

*) لكل نقطة $M(a,b)$ العدد $z=a+ib$ يسمى لحق النقطة M

ونكتب: $aff(M)=z$

*) لكل $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ النقطة $M(a,b)$ تسمى صورة z في المستوى العقدي. ونكتب $M(z)$.

أمثلة:

*) صورة العدد $1+i$ هي $A(1,1)$

*) صورة العدد $1-2i$ هي $B(1,-2)$

*) صورة العدد 2 هي $C(2,0)$

*) صورة العدد -2 هي $D(-2,0)$

*) صورة العدد $2i$ هي $E(0,2)$

*) صورة العدد $-3i$ هي $F(0,-3)$

ملاحظة:

المستوى (P) منسوب إلى م $(o,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ يسمى مستوى عقدي.

محور الأفاصيل مكون من صور لأعداد الحقيقية ويسمى محور حقيقي.

محور الأراتيب مكون من صور الأعداد التخيلية صرف ويسمى محور تخيلي.

$$M\in(o,\vec{e}_1)\Leftrightarrow aff(M)\in\mathbb{R}$$
$$M\in(o,\vec{e}_2)\Leftrightarrow aff(M)\in i\mathbb{R}$$

b) خاصيات:

1- التطبيق $f:\mathbb{C}\to P$ تقابل.
$z\to M(z)$
$aff(M)=aff(M')\Leftrightarrow M=M'$

2- لتكن $M(z)$ مع $z=a+ib$

لدينا $\bar{z}=a-ib$ إذن $M'(\bar{z})$ هي مماثلة $M(z)$ بالنسبة لمحور الأفاصيل.

ولدينا $-z=-a-ib$ إذن $M''(-z)$ هي مماثلة $M(z)$ بالنسبة لأصل المعلم.

$$M'=S_{(o,\vec{e}_1)}(M)\Leftrightarrow aff(M'')=\overline{aff(M)}$$
$$M'=S_0(M)\Leftrightarrow qff(M')=-aff(M)$$

3- لتكن M لحقها $z=a+ib$ $M(a,b)$

لدينا:
$$OM=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$$

خاصية

لكل M من P: $OM=|aff(M)|$

تمارين تطبيقية:

1- نعتبر النقطة $A(-3+4i)$. بين أن A تنتمي إلى الدائرة (ξ) التي مركزها o وشعاعها 5.

لدينا:
$$OA=|aff(A)|=|-3+4i|$$
$$=|\sqrt{9+16}|=5$$

إذن: $A\in(\xi)$

2- نعتبر المجموعة: $E=\{M(z)/2|z|=5\}$

حدد طبيعة E وعناصرها المميزة.

$$M(z)\in E\Leftrightarrow 2|z|=5$$
$$\Leftrightarrow |z|=\frac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow OM=\frac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow M\in\xi\left(0,\frac{5}{2}\right)$$

إذن E هي الدائرة (ξ) التي مركزها o وشعاعها $\frac{5}{2}$.

طريقة (2):

لنحدد معادلة ديكارتية لـ E:

نضع $z=x+iy$. إذن:

$$M(z)\in E\Leftrightarrow 2|z|=5$$
$$\Leftrightarrow |z|=\frac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow |z|^2=\frac{25}{4}$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2=\frac{25}{4}$$

وهذه معادلة دائرة مركزها o وشعاعها $\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$

إذن E على $\xi\left(o,\frac{5}{2}\right)$.

2) لحق متجهة:

a) تعريف:

لكل متجهة $\vec{u}(a,b)$ العدد $z=a+ib$ يسمى لحق المتجهة $\vec{u}$

ونكتب $aff(\vec{u})=z$

ولكل $z=a+ib$ المتجهة $\vec{u}(a,b)$ تسمى صورة العدد z في المستوى المتجهي V_2. نكتب $\vec{u}(z)$.

b) خاصيات:

1- التطبيق $f:\mathbb{C}\to V_2$ تقابل.

$$z\to \vec{u}(z)$$
$$\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow aff(\vec{u})=aff(\vec{v})$$
$$z=z'\Leftrightarrow \vec{u}(z)=\vec{v}(z')$$

2- لتكن $\vec{u}(z)$ و $\vec{v}(z')$

مع $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$

لدينا $\vec{u}(a,b)$ و $\vec{v}(a',b')$ إذن $\vec{u}+\vec{v}(a+a',b+b')$

إذن:
$$aff(\vec{u}+\vec{v})=a+a'+i(b+b')$$
$$=a+ib+a'+ib'$$
$$=z+z'=aff(\vec{u})+aff(\vec{v})$$

ليكن $\alpha\in\mathbb{R}$: $\alpha\vec{u}(\alpha a,\alpha b)$

$$aff(\alpha\vec{u})=\alpha a+\alpha ib=\alpha(a+ib)=\alpha z$$
$$=\alpha aff(\vec{u})$$

خاصية:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من V_2 و α و β من $\mathbb{R}$

لدينا:
$$aff(\vec{u}+\vec{v})=aff(\vec{u})+aff(\vec{v})$$
$$aff(\alpha\vec{u})=\alpha aff(\vec{u})$$
$$aff(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha aff(\vec{u})+\beta aff(\vec{v})$$

3- لتكن $\vec{u}(z)$ مع $z=a+ib$ $\vec{u}(a,b)$

لدينا: $\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2}=|z|=|aff(\vec{u})|$

لكل $\vec{u}$ من V_2 لدينا: $\boxed{\|\vec{u}\|=|aff(\vec{u})|}$

4- لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ مع $M(a,b):z=a+ib$

$M'(a',b'):z'=a'+ib'$

$$\overrightarrow{MM'}(a'-a,b'-b)$$
$$aff(\overrightarrow{MM'})=a'-a+i(b'-b)$$
$$=a'+ib'-(a+ib)=z'-z=aff(M')-aff(M)$$

ولدينا:
$$MM'=\|\overrightarrow{MM'}\|=|aff(\overrightarrow{MM'})|$$
$$=|aff(M')-aff(M)|$$

خاصية:

لكل M و M' من P :
$$aff(\overrightarrow{MM'})=aff(M')-aff(M)$$
$$MM'=|aff(M')-aff(M)|$$

تمارين تطبيقية:

تمرين 1 نعتبر النقط $A(i);B(1+2i);C(3+i);D(2)$

بين أن $ABCD$ متوازي أضلاع.

لنبين أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

لدينا:
$$aff(\overrightarrow{AB})=aff(B)-aff(A)$$
$$=1+2i-i=1+i$$
$$aff(\overrightarrow{DC})=aff(C)-aff(D)$$
$$=3+i-2=1+i$$

إذن $aff(\overrightarrow{AB})=aff(\overrightarrow{DC})$

ومنه: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

وبالتالي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

تمرين 2

نعتبر النقط $A(1)\ ;\ B(j)\ ;\ C(\bar{j})$ مع $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

بين أن ABC متساوي أضلاع.

لدينا:
$$AB=|aff(B)-aff(A)|$$
$$=\left|-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right|=\left|-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$
$$=\sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$$
$$AC=|aff(C)-aff(A)|=\left|-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right|$$
$$=\left|-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$$
$$BC=|aff(C)-aff(B)|=\left|-\frac{1}{2}--i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$
$$=\left|-2i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$$

إذن: $AB=BC=AC$

ومنه ABC متساوي الأضلاع.

5- ليكن z_1 عدد عقدي صورته A_1

ليكن z_2 عدد عقدي صورته A_2

لنحدد صورة z_1+z_2.

لدينا:
$$z_1+z_2=aff(\overrightarrow{OA_1})+aff(\overrightarrow{OA_2})$$
$$=aff(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2})$$

لتكن A النقطة بحيث $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$

(OA_1AA_2 متوازي أضلاع)

إذن $z_1+z_2=aff(\overrightarrow{OA})=aff(A)$

خاصية:

إذا كان z_1 لحق النقطة A_1 و z_2 لحق A_2 فإن: z_1+z_2 هو لحق النقطة A بحيث $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$ أي OA_1AA_2 متوازي أضلاع.

6- ليكن z عدد عقدي صورته A . وليكن $\alpha\in\mathbb{R}$

- لنحدد صورة αz.

لدينا
$$\alpha z=\alpha aff(\overrightarrow{OA})$$
$$=aff(\alpha\overrightarrow{OA})$$

لتكن A' نقطة بحيث $\overrightarrow{OA'}=\alpha\overrightarrow{OA}$

لدينا $\alpha z=aff(\overrightarrow{OA'})=aff(A')$

خاصية:

إذا كان z لحق النقطة M و α عدد حقيقي فإن αz هو لحق M' بحيث $\overrightarrow{OM'}=\alpha\overrightarrow{OM}$

c) تطبيقات:

1- التأويل الهندسي للتطبيق $(a\in\mathbb{C})\ z\to z+a$

نعتبر التطبيق:

$$f:\quad P\to P \qquad \text{مع } a\in\mathbb{C}$$
$$M(z)\to M'(z')/z'=z+a$$

لنحدد طبيعة f

لتكن $M(z)$ نقطة من P و $M'(z')$ صورتها.

لدينا: $z'=z+a$

لدينا: $aff\left(\overrightarrow{MM'}\right)=aff\left(M'\right)-aff\left(M\right)$

$=z+a-z=a$

لتكن $\vec{u}$ لحقها a.

إذن $aff\left(\overrightarrow{MM'}\right)=aff\left(\vec{u}\right)$

يعني $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

إذن f إزاحة متجهتها $\vec{u}(a)$

خاصية:

ليكن $a\in\mathbb{C}$ التطبيق $f:\quad P\to P$

$M(z)\to M'(z')/z'=z+a$

إزاحة متجهتها $\vec{u}$ التي لحقها a

2- لحق منتصف قطعة:

لتكن I منتصف $[AB]$ يعني I مرجح $\{(A,1)(B,1)\}$

لدينا: $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$

إذن: $aff\left(I\right)=aff\left(\overrightarrow{OI}\right)=aff\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\right)$

$=\frac{1}{2}\left(aff\left(\overrightarrow{OA}\right)+aff\left(\overrightarrow{OB}\right)\right)$

إذن: $aff\left(I\right)=\frac{1}{2}\left(aff\left(A\right)+aff\left(B\right)\right)$

خاصية:

إذا كان I منتصف $[AB]$ فإن:

$aff\left(I\right)=\frac{1}{2}\left(aff\left(A\right)+aff\left(B\right)\right)$

ملاحظة:

إذا كان G مرجح $\{(B,\beta)(A,\alpha)\}$

فإن: $aff\left(G\right)=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha aff\left(A\right)+\beta aff\left(B\right)\right)$

3- شرط استقامية ثلاث نقط:

لتكن A وB وC ألحاقها z_C,z_B,z_A بحيث $A\neq B$

(A وB وC مستقيمة) $\Leftrightarrow(\exists\alpha\in\mathbb{R}):\ \overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow(\exists\alpha\in\mathbb{R}):aff\left(\overrightarrow{AC}\right)=\alpha aff\left(\overrightarrow{AB}\right)$

$\Leftrightarrow(\exists\alpha\in\mathbb{R}):z_C-z_A=\alpha\left(z_B-z_A\right)$

$\Leftrightarrow(\exists\alpha\in\mathbb{R}):\alpha=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$

$\Leftrightarrow\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$

خاصية:

لتكن A و B و C 3 نقط ألحاقها z_C,z_B,z_A بحيث $A\neq B$
تكون النقط A و B و C مستقيمة إذا وفقط إذا كان:

$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$.

تمرين تطبيقي:

نعتبر النقط $M'(iz),M(z),A(i)$ حيث $z\in\mathbb{C}$
حدد مجموعة النقط M التي تكون من أجلها A و M و M' مستقيمية.

V- الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم:

1) عمدة عدد عقدي غير منعدم

تعريف:

ليكن $z\in\mathbb{C}^*$ و M صورة العدد z.
كل قياس للزاوية الموجهة $\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM}\right)$
يسمى عمدة للعدد z.

ملاحظة:

إذا كان α قياسا للزاوية $\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM}\right)$ فإن كل عدد على شكل $\alpha+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ هو قياس ل $\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM}\right)$.

إذن: إذا كان α عمدة ل z فإن كل عدد على شكل: $\alpha+2k\pi$ هو عمدة ل z

نكتب: $\arg(z)=\alpha+2k\pi$ أو $\arg(z)=\alpha[2\pi]$

أمثلة:

حدد عمدة لكل من الأعداد: $1+3i;1-i;1+i;-2i\ ;3i;-3;2$
لتكن G,F,E,D,C,B,A صور لهذه الأعداد على التوالي:
لدينا:

$*\arg(2)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OA}\right)[2\pi]\equiv0[2\pi]$

$*\arg(-3)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]\equiv\pi[2\pi]$

$*\arg(3i)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OC}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$*\arg(-2i)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OD}\right)[2\pi]\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$*\arg(1+i)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OE}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$*\arg(1-i)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OF}\right)[2\pi]\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$*\arg(1+3i)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OG}\right)[2\pi]\equiv\alpha[2\pi]$

حيث $\tan\alpha=3$.

ملاحظة:

(* $z\in\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z)\equiv 0[2\pi]$

(* $z\in\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z)\equiv \pi[2\pi]$

(* $z\in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z)\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

(* $z\in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z)\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

(* $z\in\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \arg(z)\equiv k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

(* $z\in\mathbb{R}^- \Leftrightarrow \arg(z)\equiv \frac{\pi}{2}+k\pi$

2) الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم:

تعريف:

ليكن $z\in\mathbb{C}$. لتكن θ عمدته و r معياره: $|z|=r$

$\arg(z)\equiv\theta[2\pi]$

لتكن M صورة z.

لدينا $OM=|aff(M)|=|z|=r$

لدينا أحداثيات M:

$M(r\cos\theta, r\sin\theta)$

إذن $aff(M)=r\cos\theta+ir\sin\theta$

$aff(M)=z$

إذن $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

خاصية وتعريف:

كل عدد عقدي غير منعدم z يكتب بطريقة وحيدة على شكل $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ حيث $|z|=r$ و $\theta\equiv\arg(z)[2\pi]$
و هذه الكتابة تسمى الشكل المثلثي للعدد z . ونكتب $z=[r,\theta]$

ملاحظة:

*) $z=0$ ليست له لا عمدة و لا شكل مثلثي.

*) إذا كان $z=[r,\theta]$ و M صورة z فإن (r,θ) يسمى زوج الأحداثيات القطبية ل M.

*) $[r,\theta]=[r',\theta'] \Leftrightarrow \begin{cases} r=r' \\ \theta\equiv\theta'[2\pi]\end{cases}$

يعني: $z=z' \Leftrightarrow \begin{cases}|z|=|z'|\\ \arg(z)=\arg(z')[2\pi]\end{cases}$

*) ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}^*$ للحصول على ش المثلثي ل z نتبع ما يلي

$$z=a+ib=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

ولدينا $\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=1$

إذن يوجد α بحيث: $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

إذن: $z=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

خاصية:

$z=a+ib$ من $\mathbb{C}^*$ الشكل المثلثي ل z هو $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$
حيث $r=\sqrt{a^2+b^2}$ و $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

تمارين تطبيقية

تمرين 1

حدد الشكل المثلثي للأعداد التالية:

*) $z=5$ لدينا $|z|=5$ و $\arg(z)\equiv 0[2\pi]$

إذن $z=[5,0]$

*) $z=-3$

$\arg(z)\equiv\pi[2\pi], |z|=3$ إذن $z=[3,\pi]$

*) $z=2i$

$\arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi], |z|=2$ إذن $z=\left[2,\frac{\pi}{2}\right]$

*) $z=-3i$

$\arg(z)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]; |z|=3$ إذن $z=\left[3,-\frac{\pi}{2}\right]$

*) $z=1+i\sqrt{3}$

$|z|=2$

$$z=1+i\sqrt{3}$$
$$=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$z=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$$

*) $z=\sqrt{3}-i$; $|z|=2$

لدينا:

$$z=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=2\left(\cos-\frac{\pi}{6}+i\sin-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$z=\left[2,-\frac{\pi}{6}\right]$$

*) $z=-\sqrt{2}+\sqrt{6}i$

$$z=2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}i\right)$$
$$=2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$z=\left[2\sqrt{2},\frac{2\pi}{3}\right]$$

*) $z=-\sqrt{6}-i\sqrt{2}$ $\quad |z|=2\sqrt{2}$

$$z=2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)$$
$$=2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$$
$$=2\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

إذن: $z=\left[2\sqrt{2},\frac{7\pi}{6}\right]$

*) $z=\sin\alpha+i\cos\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$

لدينا $|z|=1$

$$z=\sin\alpha+i\cos\alpha$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$
$$z=\left[1,\frac{\pi}{2}-\alpha\right]$$

*) $z=-\sin\alpha-i\cos\alpha$ لدينا $|z|=1$

$$z=-\sin\alpha-i\cos\alpha$$
$$=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$
$$=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$
$$=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$$

إذن: $z=\left[1,\frac{3\pi}{2}-\alpha\right]$

*) $z=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ مع $\alpha\in\mathbb{R},a\in\mathbb{R}^*$

لدينا $|z|=|a|$

إذا كان $a\rangle 0$ فإن $|z|=a$

ولدينا $z=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

إذن $z=[a,\alpha]$

إذا كان $a\langle 0$ فإن $|z|=-a$

$$z=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$
$$=-a(-\cos\alpha-i\sin\alpha)$$
$$=-a(\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha))$$

إذن: $z=[-a,\pi+\alpha]$

ملاحظة:

إذا كان: $z=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ مع $a\rangle 0$ فإن $z=[a,\alpha]$

تمرين 2

$z=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$ مع $\alpha\in[0,2\pi]$

حدد معيار وعمدة z

$$z=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$$
$$=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

لدينا $|z|=\left|2\cos\frac{\alpha}{2}\right|$

– لندرس إشارة $\cos\frac{\alpha}{2}$ في $[0,2\pi]$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=0\Leftrightarrow\cos\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$
$$\Leftrightarrow\alpha=\pi+2k\pi$$

ولدينا $\alpha\in[0,2\pi]$ إذن: $\alpha=\pi$.

– إذا كان $\alpha\in[0,\pi[$ فإن $\cos\frac{\alpha}{2}\rangle 0$ إذن $|z|=2\cos\frac{\alpha}{2}$

إذن $z=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

ومنه $z=\left[2\cos\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right]$

$|z|=2\cos\frac{\alpha}{2}$ و $\arg(\ )\equiv\frac{\alpha}{2}[2\pi]$

– إذا كان $\alpha\in]\pi,2\pi]$ فإن $\cos\frac{\alpha}{2}\langle 0$ إذن $|z|=-2\cos\frac{\alpha}{2}$

$$z=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$=-2\cos\frac{\alpha}{2}\left(-\cos\frac{\alpha}{2}-i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$=-2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$
$$z=\left[-2\cos\frac{\alpha}{2},\pi+\frac{\alpha}{2}\right]$$

إذن $\arg(z)\equiv\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)[2\pi]$ و $|z|=2\cos\frac{\alpha}{2}$

– إذا كان $\alpha=\pi$ فإن $|z|=0$ يعني $z=0$

إذن z ليس له عمدة.

3) عمدة العدد $\bar{z}$ و $-z$

ليكن $z=[r,\theta]$

* لدينا: $\bar{z}=\overline{[r,\theta]}=\overline{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$

$$=r(\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$=r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$$

إذن $\bar{z}[r,-\theta]$

$$\arg(\bar{z})=-\theta[2\pi]$$
$$=-ar(z)[2\pi]$$

* ولدينا: $-z=-r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$=r(-\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$=r(\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta))$$
$$-z=[r,\pi+\theta]$$
$$\arg(-z)=\arg(z)+\pi[2\pi]$$

خاصية:

*) $\overline{[r,\theta]}=[r,-\theta]$; $\arg(\bar{z})=-\arg(z)[2\pi]$

*) $-[r,\theta]=[r,\pi+\theta]$; $\arg(-z)=\arg(z)+\pi[2\pi]$

4) العمدة و العمليات في $\mathbb{C}$

a) الجداء:

ليكن $z=[r,\theta]$ و $z'=[r',\theta']$

$$zz'=r(\cos\theta+i\sin\theta)r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$$
$$=rr'\left[(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\cos\theta\sin\theta'+\sin\theta\cos\theta')\right]$$
$$=rr'\left(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')\right)$$

إذن $zz'=[rr',\theta+\theta']$

$$\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$$

خاصية:

*) $[r,\theta]\times[r',\theta']=[rr',\theta+\theta']$

*) $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$

ملاحظة:

*) $\prod_{i=1}^{n}[r_i,\theta_i]=\left[\prod_{i=1}^{n}r_i,\sum_{i=1}^{n}\theta_i\right]$

*) $\arg\left(\prod_{i=1}^{n}z_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\arg(z_i)[2\pi]$

*) $(n\in\mathbb{N})\ [r,\theta]^n=[r^n,n\theta]$

*) $(n\in IN)\quad \arg(z^n)=n\arg(z)\ [2\pi]$

b) المقلوب:

ليكن $z=[r,\theta]$

$$\frac{1}{[r,\theta]}=\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{1}{r}\left(\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{1}\right)$$
$$=\frac{1}{r}\left(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right)=\left[\frac{1}{r},-\theta\right]=\frac{1}{z}$$
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg(z)[2\pi]$$

خاصية:

*) $\frac{1}{[r,\theta]}=\left[\frac{1}{r},-\theta\right]$

*) $\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg(z)[2\pi]$

ملاحظة: $(n\in\mathbb{N})$

$$[r,\theta]^{-n}=\frac{1}{[r,\theta]^n}=\frac{1}{[r^n,n\theta]}=\left[\frac{1}{r^n},-n\theta\right]$$

إذن $[r,\theta]^{-n}=[r^{-n},-n\theta]$

$$\arg(z^{-n})\equiv-n\arg(z)[2\pi]$$

إذن:

$(\forall n\in\mathbb{Z})\ [r,\theta]^n=[r^n,n\theta]$

$\arg(z^n)\equiv n\arg(z)[2\pi]$

c) الخارج:

$$\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']}=[r,\theta]\times\frac{1}{[r',\theta']}$$
$$=[r,\theta].\left[\frac{1}{r'},-\theta'\right]=\left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg\left(z\times\frac{1}{z'}\right)[2\pi]$$
$$\equiv\arg(z)+\arg\left(\frac{1}{z'}\right)[2\pi]$$
$$\equiv\arg(z)-\arg(z')[2\pi]$$

خاصية:

$\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']}=\left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg(z)-\arg(z')[2\pi]$

تمارين تطبيقية:

تمرين 1

حدد الشكل المثلثي ل z في الحالات التالية:

$$z=2i\frac{(1-i)^4\left(\sqrt{3}+i\right)}{5\left(\sqrt{3}-3i\right)^2}$$

لدينا:

$$*\ 2i=\left[2,\frac{\pi}{2}\right]$$
$$1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos-\frac{\pi}{4}+i\sin-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$*\ 1-i=\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]$$
$$\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$*\ \sqrt{3}+i=\left[2,\frac{\pi}{6}\right]$$
$$*\ 5=[5,0]$$
$$*\ \sqrt{3}-3i=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos-\frac{\pi}{3}+i\sin-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\sqrt{3}-3i=\left[2\sqrt{3},-\frac{\pi}{3}\right]$$

إذن:

$$z=\frac{\left[2,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]^n\times\left[2,\frac{\pi}{6}\right]}{[5,0]\times\left[2\sqrt{3},-\frac{\pi}{3}\right]^2}=\frac{\left[2,\frac{\pi}{2}\right]\times[4,-\pi]\times\left[2,\frac{\pi}{6}\right]}{[5,0]\times\left[12,-2\frac{\pi}{3}\right]}$$
$$=\frac{\left[16,-\frac{\pi}{3}\right]}{\left[60,-2\frac{\pi}{3}\right]}=\left[\frac{16}{60},\frac{\pi}{3}\right]$$

تمرين 2

ليكن $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=1+i$, $z=\frac{z_1}{z_2}$

– حدد الشكل المثلثي لكل من z_1 و z_2

- استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

لدينا
$$z_1 = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$z_1 = \left[2,\frac{\pi}{3}\right]$$
$$z_2 = 1+i = \sqrt{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$z_2 = \left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$$
$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\left[2,\frac{\pi}{3}\right]}{\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]} = \left[\sqrt{2},\frac{\pi}{12}\right]$$

*) لدينا: $z = \left[\sqrt{2},\frac{\pi}{12}\right]$
$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right) \quad (1)$$

ولدينا
$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{2}$$
$$= \frac{1-i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = z \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن:
$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{4\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$
يعني
$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

ملاحظة: $[r,\alpha] = [r,\alpha+2k\pi]$

تمرين

نعتبر العدد $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) أحسب z^{2000}
2) حدد قيم العدد النسبي n التي يكون من أجلها $z^n \in IR$
3) حدد حسب قيم العدد الطبيعي n z^n .

5) زاوية متجهتين:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين لحقاهما على التوالي $z_{\vec{u}}$ و $z_{\vec{v}}$

لتكن A و B النقطتين بحيث $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$
$$aff(A) = aff\left(\overrightarrow{OA}\right) = aff(\vec{u}) = z_{\vec{u}}$$
$$aff(B) = aff\left(\overrightarrow{OB}\right) = aff(\vec{v}) = z_{\vec{v}}$$

لدينا:
$$\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \left(\overline{\overrightarrow{OA},\vec{e}_1}\right) + \left(\overline{\vec{e}_1,\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \left(\overline{\vec{e}_1,\overrightarrow{OB}}\right) - \left(\overline{\vec{e}_1,\overrightarrow{OA}}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \arg(aff(B)) - \arg(aff(A))[2\pi]$$
$$\equiv \arg(z_{\vec{v}}) - \arg(z_{\vec{u}})[2\pi]$$
$$\equiv \arg(aff(\vec{v})) - \arg(aff(\vec{u}))[2\pi]$$

خاصية:
$$\boxed{\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right) \equiv \arg(aff(\vec{v})) - \arg(aff(\vec{u}))[2\pi]}$$

حالات خاصية:

*) $$\left(\overline{\vec{e}_1,\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg\left(aff\left(\overrightarrow{AB}\right)\right) - \arg(1)[2\pi]$$
$$\equiv \arg(aff(B) - aff(A))$$
$$\equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$$
$$\boxed{\left(\overline{\vec{e}_1,\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]}$$

*) $$\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg\left(aff\left(\overrightarrow{CD}\right)\right) - \arg\left(aff\left(\overrightarrow{AB}\right)\right)[2\pi]$$
$$\equiv \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A)[2\pi]$$
$$\boxed{\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]}$$

تمارين تطبيقية:

تمرين 1

نعتبر النقط $A(i), B(z_1), C(z_2)$ حيث z_1 و z_2 من $\mathbb{C}$ يحققان: $z_2 = iz_1 + i + 1$.
بين أن المثلث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A .

لدينا:
$$\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$

ولدينا:
$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{iz_1 + i + 1 - i}{z_1 - i}$$
$$= \frac{iz_1 + 1}{z_1 - i}$$
$$= \frac{i(z_1 - i)}{z_1 - i} = i = \left[1,\frac{\pi}{2}\right]$$

ومنه:
$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \arg(i)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

وبالتالي:
$$\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

إذن ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A .

تمرين 2

حدد وانشئ المجموعة
$$E = \left\{M(z) \ / \ \arg(z-i)^2 \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]\right\}$$

6) صيغة موافر وتطبيقاتها:

ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{Z}$ $\qquad [1,\theta]^n=[1,n\theta]$

يعني: $\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

خاصية:

$$\boxed{\begin{gathered}(\forall\theta\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{Z})\\ \left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\end{gathered}}$$

تطبيقات:

حساب $\cos(nx)$ و $\sin(nx)$ بدلالة $\cos x$ و $\sin x$

– لدينا: $(\cos nx+i\sin nx)=(\cos x+i\sin x)^n$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\cos x\right)^k.\left(i\sin x\right)^{n-k}$$

ومنه:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(nx)&=R\acute{e}\left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\cos x\right)^k.\left(i\sin x\right)^{n-k}\right]\\ \sin(nx)&=\mathrm{Im}\left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\cos x\right)^k.\left(i\sin x\right)^{n-k}\right]\end{aligned}}$$

مثال:

احسب $\cos 5x$ و $\sin 5x$ بدلالة $\cos x$ و $\sin x$

$$\begin{aligned}\cos 5x+i\sin 5x&=\left(\cos x+i\sin\right)^5\\ &=\cos^5x+5\cos^4\left(i\sin x\right)+10\cos^3x\left(i\sin x\right)^2\\ &\quad+10\cos^2x\left(i\sin x\right)^3+5\cos\left(i\sin x\right)^4+\left(i\sin x\right)^5\\ &=\cos^5x+5\cos^4x\left(i\sin x\right)-10\cos^3x\sin^2x\\ &\quad-10i\cos^2x\sin^3x+5\cos x\sin^4x+i\sin^5x\\ &=\left(\cos^5x-10\cos^3x\sin^2x+5\cos x\sin^4x\right)\\ &\quad+i\left(5\cos^4x\sin x-10\cos^2x\sin^3x+\sin^5x\right)\end{aligned}$$

ومنه:

$$\cos 5x=\left(\cos^5x-10\cos^3x\sin^2x+5\cos x\sin^4x\right)$$

$$\sin 5x=\left(5\cos^4x\sin x-10\cos^2x\sin^3x+\sin^5x\right)$$

7) الترميز الأسي لعدد عقدي:

a) الترميز:

$$\boxed{\begin{gathered}\text{نرمز للعدد } [1,\theta] \text{ بالرمز: } e^{i\theta}\\ e^{i\theta}=[1,\theta]=\cos\theta+i\sin\theta\end{gathered}}$$

ملاحظة:

$$[r,\theta]=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)=re^{i\theta}$$

$$\boxed{[r,\theta]=re^{i\theta}}$$

أمثلة:

*) $e^{i\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

*) $e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$

*) $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

*) $\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) خاصيات:

(* $e^{i\theta}.e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$

(* $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$

(* $\dfrac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$

(* $(\forall n\in\mathbb{Z})\ \left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$

(* $\left(\overline{e^{i\theta}}\right)=e^{-i\theta}$

(* $-e^{i\theta}=e^{i\pi}.e^{i\theta}=e^{i(\pi+\theta)}$

8) صيغتا أولير Euler:

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $\qquad (1)\ e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$$e^{-ix}=\cos(-x)+i\sin(-x)$$

$$(2)\ e^{-ix}=\cos x-i\sin x$$

من $(1)+(2)$ نستنتج أن:

$$2\cos x=e^{ix}+e^{-ix}$$

إذن $\qquad \cos x=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$

ومن $(1)-(2)$ نستنتج أن:

$$2i\sin x=e^{ix}-e^{-ix}$$

إذن $\qquad \sin x=\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$

خاصية:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos x&=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\\ \sin x&=\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\end{aligned}}$$

ملاحظة:

$$\boxed{\begin{aligned}e^{ix}+e^{-ix}&=2\cos x\\ e^{ix}-e^{-ix}&=2i\sin x\end{aligned}}$$

تطبيق: اخطاط حدودية مثلثية:

يعني كتابتها بدلالة $\cos x$ و $\sin x$.

تمرين:

اخطط الحدودية: $P(x)=\cos^3x\sin^3x$

نعلم أن $\begin{cases}\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\\ \sin x=\frac{1}{2i}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\end{cases}$

إذن:

$$P(x)=\frac{1}{8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3\times\left(\frac{-1}{4}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2\right)$$
$$=\frac{-1}{32}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2$$
$$=\frac{-1}{32}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)^2$$
$$=\frac{-1}{32}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{4ix}+e^{-4ix}-2\right)$$
$$=\frac{-1}{32}\left(e^{i5x}+e^{-3ix}-2e^{ix}+e^{3ix}+e^{-5ix}+-2e^{-ix}\right)$$
$$=\frac{-1}{32}\left[\left(e^{i5x}+e^{-i5x}\right)+\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)-2\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right]$$
$$=\frac{-1}{32}\left(2\cos(5x)+2\cos(3x)-4\cos(x)\right)$$

إذن
$$P(x)=\frac{-1}{16}\left(\cos(5x)+\cos(3x)-2\cos(x)\right)$$

ملاحظة: طريقة البحث عن الشكل المثلثي لمجموع عددين لعقديين لهما نفس المعيار:

طريق1

$$e^{i\alpha}+e^{i\beta}=(\cos\alpha+\cos\beta)+i\,(\sin\alpha+\sin\beta)$$
$$=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})+i\,2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$
$$=2\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})\left[\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})+i\,\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\right]$$

$$e^{i\alpha}-e^{i\beta}=(\cos\alpha-\cos\beta)+i\,(\sin\alpha-\sin\beta)$$
$$=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})+i\,2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$
$$=2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\left[-\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})+i\,\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\right]$$

طريقة2

*) $e^{i\alpha}+e^{i\beta}=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$
$$=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\times 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

*) $e^{i\alpha}-e^{i\beta}=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}-e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$
$$=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\times 2i\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.e^{i\frac{\pi}{2}}.e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$
$$=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.e^{i\left(\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}\right)}$$
$$=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}\right)$$

VI- الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم:

1) تعريف:

ليكن z من $\mathbb{C}$ و $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$
نسمي الجذر النوني أو الجذر من الرتبة n للعدد z كل عدد عقدي z يحقق $z^n=Z$

أمثلة:

*) $i^2=-1$, $(i)^2=1$
كل من i و $-i$ جذر من الرتبة 2 للعدد -1.

*) $(-i)^4=1 , i^4=1 , (-1)^4=1 , 1^4=1$
الأعداد $-i,i,-1,1$ جذور من الرتبة 4 للعدد 1.

2) تحديد الجذور من الرتبة n.

ليكن: $z=re^{i\theta}$ مع $r\rangle 0$
نضع $z=ee^{iq}$ مع $q\rangle 0$
لدينا: $z^n=Z\Leftrightarrow e^n e^{in\ell}=re^{i\theta}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}e^n=r\\ n\ell\equiv\theta[2\pi]\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}e=\sqrt[n]{r}\\ \ell\equiv\frac{\theta}{n}\left[\frac{2\pi}{n}\right]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ell=\sqrt[n]{r}\\ \ell=\frac{\theta}{n}+\frac{2k}{n}(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\ell=\sqrt[n]{r}\\ \ell\equiv\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}[2\pi]/k\in\{0,1,2,...,(n-1)\}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow z=\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}/k\in\{0,1,2,...,(n-1)\}$$

إذن هناك n جذر نوني.

خاصية:

ليكن $Z=re^{i\theta}$ (مع $r\rangle 0$) و $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$
العدد Z يقبل n جذر نوني. وهذه الجذور النونية هي الأعداد:
$$z_k=\sqrt[n]{r}.e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}/k\in\{0,1,2,...,(n-1)\}$$

مثال:

لنحدد الجذور من الرتبة 3 للعدد $Z=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$
- لنحدد الشكل المثلثي ل Z

لدينا:
$$Z=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$$
$$=2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

إذن:
$$Z=2e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

إذن الجذور من الرتبة 3 ل Z هي الأعداد:

$$z_k = \sqrt[3]{2}.e^{i\frac{5\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}} \quad k \in \{0,1,2\}$$

$$z_0 = \sqrt[3]{2}.e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2}.e^{i\frac{3\pi}{12}}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}.e^{i\frac{21\pi}{12}} = \sqrt[3]{2}.e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

3) صور الجذور النونية:

ليكن $Z = re^{i\theta}$ $(r\rangle 0)$

الجذور النونية ل Z هي الأعداد

$$z_k = \sqrt[n]{r}.e^{i\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}} \; / \; k \in \{0,1,2,...,(n-1)\}$$

لتكن $M_0, M_1, ..., M_{n-1}$ صور $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$ على التوالي

$$OM_k = |aff(M_k)| = |z_k| = \sqrt[n]{r}$$

إذن النقط M_k تنتمي إلى الدائرة ζ التي مركزها o وشعاعها $\sqrt[n]{r}$

ولدينا:

$$(\overrightarrow{OM}_k, \overrightarrow{OM}_{k+1}) \equiv \arg(z_{k+1}) - \arg(z_k)[2\pi]$$

$$\equiv \frac{\theta}{n} + \frac{2(k+1)\pi}{n} - \frac{\theta}{n} - \frac{2k\pi}{n}[2\pi]$$

$$\equiv \frac{2\pi}{n}[2\pi]$$

إذن الزاوية $(\overrightarrow{OM}_k, \overrightarrow{OM}_{k+1})$ ثابتة.

إذن النقط M_k تكون مضلعا منتظما.

خاصية:

ليكن $Z = re^{i\theta}$ $(r\rangle 0)$

صور الجذور النونية للعدد Z تكون مضلعا منتظما ذو n ضلع محاط بالدائرة التي مركزها o وشعاعها $\sqrt[n]{r}$.

4) الجذور من الرتبة n للوحدة: unité

a) تحديد الجذور من الرتبة n للوحدة

ليكن $z = 1$

لدينا $z = e^{io}$

إذن الجذور من الرتبة n ل 1 هي الأعداد:

$$w_k = \sqrt[n]{1}\, e^{i\frac{o}{n}+\frac{2k\pi}{n}}$$

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \; / \; k \in \{0,1,...,(n-1)\}$$

خاصية:

الجذور من الرتبة n للعدد 1 (للوحدة) هي الأعداد:

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \; / \; k \in \{0,1,...,(n-1)\}$$

أمثلة:

1) الجذور المربعة للعدد 1 هي الأعداد:

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{2}} = e^{ik\pi} \; / \; k \in \{0,1\}$$

هذان الجذران هما:

$$w_0 = e^{io} = 1$$

$$w_1 = e^{i\pi} = -1$$

2) الجذور من الرتبة 3 للوحدة هي الأعداد:

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}} \; / \; k \in \{0,1,2\}$$

هذه الجذور هي:

$$w_0 = e^{io} = 1$$

$$w_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$w_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j \qquad j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن الجذور المكعبة ل 1 هي $\bar{j}, j, 1$

ملاحظة:

*) $j^3 = 1$; $j^2 = \bar{j}$

*) $1 + j + \bar{j} = 0$ إذن $1 + j + j^2 = 0$

*) $j^2 = -1 - j$

3) الجذور من الرتبة 4 ل 1:

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{4}} = e^{i\frac{k\pi}{2}} \; / \; k \in \{0,1,2,3\}$$

هذه الجذور هي:

$$w_0 = e^{io} = 1$$

$$w_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$w_2 = e^{i\pi} = -1$$

$$w_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{i-\frac{\pi}{2}} = -i$$

إذن الجذور من الرتبة 4 ل 1 هي: $-i, i, -1, 1$

b) خاصيات:

1- لتكن w_k الجذور من الرتبة n ل 1:

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

لدينا:

$$= \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = w_1^k$$

خاصية

لتكن w_k الجذور النونية لـ 1:

$\forall k \in \{0,1,...,(n-1)\}$ $w_k = w_1^k$ مع $w_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

إذن الجذور من الرتبة n لـ 1 هي: $1, w_1, w_1^2, w_1^3, ..., w_1^{n-1}$

2− لتكن w_k الجذور النونية ل 1:

$$w_0+w_1+w_2+\dots+w_{n-1}=1+w_1+w_1^2+\dots+w_1^{n-1}$$
$$=\frac{(1-w_1)\left(1+w_1+w_1^2+\dots+w_1^{n-1}\right)}{(1-w_1)}$$
$$=\frac{1-w_1^n}{1-w_1}=\frac{1-1}{1-w_1}=0$$

($w_1^n=1$ ، w_1 جذر نوني ل 1.)

خاصية

مجموع الجذور النونية للعدد 1 منعدم.

ملاحظة:

*) إذا كان w جذر نوني للعدد 1 فإن كل من $\overline{w}$ و $\frac{1}{w}$ جذر نوني للعدد 1.

*) إذا كان w و w' جذرين نونيين للعدد 1 فإن كل من ww' و $\frac{w}{w'}$ جذر نوني للعدد 1.

c) العلاقة بين الجذور النونية ل 1 و الجذور النونية لعدد من $\mathbb{C}^*$

ليكن Z من $\mathbb{C}^*$

نفترض أن $a\neq 0$ جذر نوني ل Z $\left(a^n=Z\right)$

− لتحديد الجذور الأخرى:

$$z^n=Z \Leftrightarrow z^n=a^n$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{a}\right)^n=1$$

هذا يعني أن $\frac{z}{a}$ جذر نوني ل 1

يعني: $\frac{z}{a}=w_k \,/\, k\in\{0,1,\dots,(n-1)\}$

يعني: $z=aw_k \,/\, k\in\{0,1,\dots,(n-1)\}$

خاصية:

ليكن Z من $\mathbb{C}^*$ و a جذر نوني ل Z
نحصل على الجذور النونية ل Z بضرب a في الجذور النونية للوحدة 1.

مثال:

أحسب $(1+2i)^3$ و استنتج الجذور من الرتبة 3 للعدد $Z=-1+2i$

لدينا:

$$(1+2i)^3=(1+2i)^2(1+2i)$$
$$=(1+4i-4)(1+2i)=1+2i+4i-8-4-8i$$
$$=-11-2i$$

− لدينا $(1+2i)^3=Z$

إذن $1+2i$ جذر من الرتبة 3 ل Z

ونعلم أن الجذور من الرتبة 3 ل 1 هي: $1, j, \overline{j}$

− إذن الجذور من الرتبة 3 ل Z هي:

$$z_0=1(1+2i)=1+2i$$
$$z_1=j(1+2i)=\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+2i)$$
$$z_2=\overline{j}(1+2i)$$

5) الجذور المربعة لعدد من $\mathbb{C}^*$

a) الطريقة المثلثية:

ليكن $Z=re^{i\theta}$ $(r\rangle 0)$

لنحدد الجذرين المربعين ل Z.

$$z^2=Z \Leftrightarrow z^2=re^{i\theta}$$
$$\Leftrightarrow z^2=\left(\sqrt{r}\right)^2\left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}} \\ z=-\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}} \end{cases}$$

إذن الجذران المربعان ل Z هما: $\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$ و $-\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$

b) الطريقة الجبرية:

1) إذا كان $Z=a\in\mathbb{R}_+^*)$

لدينا: $Z=a=\left(\sqrt{a}\right)^2$

إذن $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ هما الجذران المربعان للعدد Z:

2) إذا كان $Z=-a\left(a\in\mathbb{R}_+^*\right)$

$$Z=-a=i^2\left(\sqrt{a}\right)^2=\left(i\sqrt{a}\right)^2$$

إذن جذرا Z هما: $i\sqrt{a}$ و $-i\sqrt{a}$

3− إذا كان $Z=ib\left(b\in\mathbb{R}_+^*\right)$

$$Z=ib=2i.\frac{b}{2}=(1+i)^2\left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2$$
$$=\left((1+i)\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2$$

إذن جذرا Z هما $z=(1+i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ و $-z$

4) إذا كان $Z=-ib\left(b\in\mathbb{R}_+^*\right)$

$$Z=-ib=-2i.\frac{b}{2}=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2(1-i)^2$$
$$=\left((1-i)\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2$$

إذن جذرا Z هما $z=(1-i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ و $-z$

5) إذا كان $\boxed{Z = a + ib}$ مع $(a \neq 0$ و $b \neq 0)$

مثال:

لنحدد الجذرين المربعين للعدد:

$$Z = -3 + 4i$$

نضع $z = x + iy$ (مع y و x من $\mathbb{R}$)

$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ و $|z|^2 = x^2 + y^2$

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = Z \\ |z|^2 = |Z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & (1) \\ 2xy = 4 & (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

من (1) + (3) نستنتج أن $2x^2 = 2$ يعني $x = 1$ أو $x = -1$

ومن (1) − (3) نستنتج أن $2y^2 = 8$

يعني $y^2 = 4$

أي $y = 2$ أو $y = -2$

ومن خلال (2) لدينا $xy = 2 \rangle 0$ إذن x و y لهما نفس الإشارة

إذن $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$

إذن جذرا Z هما:

$z = 1 + 2i$ و $-z$

VII) المعادلات من الدرجة II:

نعتبر المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ مع $a \neq 0$

لدينا: $(E): az^2 + bz + c = 0$

$$\Leftrightarrow a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

نضع $\Delta = b^2 - 4ac$

$$(E) \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

*) إذا كان $\Delta = 0$ فإن:

$$(E) \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a}$$

إذن: $S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

*) إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن Δ يقبل جذرين مربعين u و $-u$

إذن:

$$(E) \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{u^2}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{u}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{u}{2a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-b-u}{2a} \quad \text{أو} \quad z = \frac{-b+u}{2a}$$

خاصية:

نعتبر المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ مع $a \neq 0$

نضع $\Delta = b^2 - 4ac$

1− إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا: $z = -\frac{b}{2a}$.

2− إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن Δ يقبل جذرين مربعين u و $-u$

يكون للمعادلة حلان: $z = \frac{-b+u}{2a}$ و $z = \frac{-b-u}{2a}$.

ملاحظات:

*) نعتبر المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ مع $a \neq 0$

إذا كان z_1 و z_2 حلي المعادلة فإن:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

*) نعتبر المعادلة $az^2 + 2b'z + c = 0$ مع $a \neq 0$

من أجل حل المعادلة نستعمل المميز المختصر

$$\Delta' = b' - ac$$

1− إذا كان $\boxed{\Delta' = 0}$ المعادلة لها حل وحيد $z = -\frac{b'}{a}$

2− إذا كان $\boxed{\Delta' \neq 0}$ المعادلة لها حلان:

$z_1 = \frac{-b'+u}{2a}$ و $z_2 = \frac{-b'-u}{2a}$. حيث u جذر مربع Δ'.

تمرين تطبيقي:

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية:

1) $z^2 + z + 1 = 0$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 = i^2 3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$$

إذن جذرا Δ هما $u = i\sqrt{3}$ و $-u$

إذن:

$$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = j$$

$$z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \overline{j}$$

إذن: $S = \{j, \overline{j}\}$

2) $(2+i)z^2 - (3+2i)z + 1 - \frac{i}{2} = 0$

$$\Delta = (3+2i) - 4(2+i)\left(1 - \frac{i}{2}\right)$$

$$= -5 + 12i$$

$$= 2^2 + (3i)^2 + 2.2.3i$$

$$= (2+3i)^2$$

إذن جذرا Δ هما $u = 2 + 3i$ و $-u$

إذن:

$$z_1 = \frac{(3+2i) - (2+3i)}{2(2+i)} \quad ; \quad z_2 = \frac{(3+2i) + (2+3i)}{2(2+i)}$$

$$= \frac{1-i}{2(2+i)} = \frac{(1-i)(2-i)}{10} \quad ; \quad = \frac{5+5i}{2(2+i)} = \frac{(5+5i)(2-i)}{10}$$

$$z_1 = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i \quad ; \quad z_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

إذن: $S = \{z_1, z_2\}$

VIII) الدوران في المستوى:

1) التمثيل العقدي للدوران:

ليكن R دوران مركزه $\Omega(g)$ وزاويته θ

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ بحيث $M\neq\Omega$

$$R(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M=\Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z-w|=|z'-w'| \\ \arg\left(\dfrac{z'-w}{z-w}\right)\equiv\theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|z-w|}{|z'-w'|}=1 \\ \arg(\ )\equiv\theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z'-w}{z-w}=e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow z'-w=e^{i\theta}(z-w)$$

$$\Leftrightarrow z'=e^{i\theta}(z-w)+w$$

نلاحظ أن هذه العلاقة تبقى صحيحة كذلك بالنسبة ل Ω.

خاصية:

> ليكن R دوران مركزه $\Omega(w)$ وزاويته θ
>
> لكل $M(z)$ و $M'(z')$ من P لدينا:
>
> $R(M)=M' \Leftrightarrow z'=e^{i\theta}(z-w)+w$
>
> الكتابة $z'=e^{i\theta}(z-w)+w$ تسمى التمثيل العقدي ل R.

مثال:

ليكن R دوران مركزه $\Omega(1+i)$ وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$

لنحدد صورة $R(1-i)$

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$. نعلم أن:

$$R(M)=M' \Leftrightarrow z'=e^{i\frac{\pi}{2}}z+(1+i)\left(1-e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow z'=iz+(1+i)(1-i)$$

$$\Leftrightarrow z'=iz+2$$

لتكن $A'(z')$ صورة $A(1-i)$

لدينا:

$$z'=i(1-i)+2$$
$$=i+3$$

إذن $A'(3+i)$

2) التأويل الهندسي للتطبيق $z\to az+b$ $(a\neq1\,;|a|=1)$

نعتبر التطبيق $f:\quad P\to P$

$M(z)\to M'(z')/z'=az+b$

(مع a و b من $\mathbb{C}$ و $|a|=1$ و $a\neq1$)

لنبين أن f دوران:

* لنبحث عن النقطة الصامدة:

لتكن $M(z)$:

$$f(M)=M \Leftrightarrow z=az+b$$
$$\Leftrightarrow z(1-a)=b$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{b}{(1-a)}$$

إذن f يقبل نقطة صامدة وحيدة هي $\Omega(w)$ مع $w=\dfrac{b}{1-a}$

* لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ من P بحيث $M\neq\Omega$

$$f(M)=M' \Leftrightarrow z'=az+b$$

ولدينا $\Omega(w)$ صامدة إذن $w=aw+b$

يعني $b=w-aw$

إذن $f(M)=M' \Leftrightarrow z'=az+w-aw$

$$\Leftrightarrow z'-w=a(z-w)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z'-w|=|a(z-w)| \\ \arg(z'-w)\equiv\arg(a(z-w))[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z'-w|=|a||z-w| \\ \arg(z'-w)\equiv\arg(a)+\arg(z-w)[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z'-w|=|z-w| \\ \arg(z'-w)-\arg(z-w)\equiv\arg(a)[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M'=\Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\arg(a)[2\pi] \end{cases}$$

إذن f دوران مركزه Ω وزاويته $\arg(a)$.

خاصية:

> ليكن a و b من $\mathbb{C}$ بحيث $a\neq1$ و $|a|=1$
>
> التطبيق: $f:\quad P\to P$
>
> $M(z)\to M'(z')/z'=az+b$
>
> دوران مركزه $\Omega(w)$ بحيث $w=\dfrac{b}{1-a}$ وزاويته $\arg(a)$

تمرين تطبيقي:

نعتبر التطبيق $f:\quad P\to P$

$$M(z)\to M'(z')/z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+1$$

حدد طبيعة التطبيق f.

* لدينا:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\neq1 \\ \left|\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=1 \end{cases}$$

إذن f دوران مركز $\Omega(w)$ بحيث:

$w=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ أي: $w=\dfrac{1}{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$w=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

وزاويته $\arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\left[1,\frac{\pi}{3}\right]$$

إذن $\arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

وبالتالي f دوران مركزه $\Omega\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ وزاويته $\theta=\frac{\pi}{3}$.