

**1. تقديم الدالة $f(x) = \exp(x) = e^x$ (الأسية النيبيرية):**

تقديم الدالة الأسية النيبيرية :

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

1. نشاط: لنعتبر الدالة العددية المعرفة ب:

$$x \rightarrow f(x) = \ln(x)$$

• هل f تقابل من المجال $I =]0, +\infty[$ إلى مجال J ؟ علل جوابك مع تحديد J .**2. مفردات:**الدالة العكسية f^{-1} لـ f تسمى الدالة الأسية النيبيرية (أو الدالة الأسية) ويرمز لها ب: \exp أو e

$$f^{-1} = \exp = e: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$$

ولهذا نكتب:

$$x \rightarrow f^{-1}(x) = \exp(x) = e^x$$

3. تعريف و خاصية:الدالة العددية المعرفة ب: $f(x) = \ln(x)$ متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$ الدالة $f(x) = \ln(x)$ تقابل من $]0, +\infty[$ إلى \mathbb{R} . الدالة العكسية f^{-1} لـ f تسمى الدالة الأسية النيبيرية (أو الدالة الأسية) ويرمز لها ب: \exp أو e

$$f^{-1} = \exp = e: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$$

الدالة الأسية معرفة كما يلي :

$$x \rightarrow f^{-1}(x) = \exp(x) = e^x$$

4. ملحوظة:

$$\exp(x) = e^x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y > 0 \end{cases}$$

العلاقة التي تربط $f(x) = \ln(x)$ و $f^{-1}(x) = \exp(x) = e^x$ هي• لدينا: $\forall x \in]0, +\infty[: f^{-1} \circ f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(f(x)) = x$ إذن: $\forall x \in]0, +\infty[: \exp \circ \ln(x) = x \Leftrightarrow \exp(\ln(x)) = x$ • لدينا: $\forall x \in \mathbb{R} : f \circ f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = x$ إذن: $\forall x \in \mathbb{R} : \ln \circ \exp(x) = x \Leftrightarrow \ln(\exp(x)) = x$.**5. كتابة جديدة :**• نعلم أن: $\forall r \in \mathbb{Q}, r = \ln(e^r)$ (1) إذن: $\forall r \in \mathbb{Q}, \exp(r) = e^r \Leftrightarrow \exp(r) = \exp(\ln(e^r))$ (1)ومنه نحصل على: $\forall r \in \mathbb{Q} : \exp(r) = e^r$ وهذا يدفعنا لتمديد هذه الكتابة على باقي الأعداد الحقيقية x ومنه: نكتب $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) = e^x$ **6. نتائج:**

الدالة $f(x) = \exp(x) = e^x$		
$\forall x > 0 : e^{\ln(x)} = x$	5	1 معرفة على $D_f = \mathbb{R}$
$\forall x \in \mathbb{R} : \ln(e^x) = x$	6	2 متصلة على $D_f = \mathbb{R}$ و قابلة للاشتقاق على $D_f = \mathbb{R}$
$\forall a, b \in \mathbb{R} : a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$	7	3 تزايدية قطعاً على المجال $D_f = \mathbb{R}$.
$\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$	8	4 $y = e^x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y > 0 \end{cases}$ $x \in \mathbb{R}$



7. أمثلة :

1. $e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$

2. $e^{\ln(24)} = 24$ و $\ln(e^{-13}) = -13$ و $e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$

3. $e^{x+1} < e^{6x-2} \Leftrightarrow x+1 = 6x-2$ و $e^{x+3} = e^{2x+7} \Leftrightarrow x+3 = 2x+7$

8. إشارة e^x :

x	$+\infty$	$-\infty$
e^x	+	

9. $\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0$ (إشارة e^x موجبة قطعا)

9. تطبيق :

1. حدد مجموعة تعريف: $f(x) = \sqrt{e^x}$ و $f(x) = \frac{2}{e^x}$

2. حل المعادلة: $e^{2x} - e^{(x-1)} = 0$

3. حل المتراجحة: $e^{2x} - e^{(x-1)} \leq 0$

II. خاصيات $f(x) = \exp(x) = e^x$

خاصيات جبرية :

1. خاصيات :

مثال	لكل a و b من \mathbb{R}	مثال	لكل a و b من \mathbb{R}
$(e^x)^3 = e^{3x}$	$(e^x)^r = e^{rx} (r \in \mathbb{Q})$	$e^7 = e^4 \times e^3$	$e^{a+b} = e^a \times e^b$
$\sqrt{e^{x-3}} = e^{\frac{1}{2}(x-3)}$	$\sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}$	$e^{-2} = \frac{1}{e^2}$	$e^{-b} = \frac{1}{e^b}$
$\sqrt[3]{e^{2+2x}} = e^{\frac{1}{3}(2+2x)}$	$\sqrt[3]{e^x} = e^{\frac{1}{3}x}$	$e^5 = \frac{e^7}{e^2}$	$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

2. برهان ل $e^{a+b} = e^a \times e^b$ ليكن a و b من \mathbb{R} نضع: $A = e^{a+b}$ و $B = e^a \times e^b$ ومنه :

$$A = e^{a+b} \Leftrightarrow \ln(A) = \ln(e^{a+b})$$

$$\Leftrightarrow \ln(A) = a+b \quad , \quad (1)$$

$$B = e^a \times e^b \Leftrightarrow \ln(B) = \ln(e^a \times e^b)$$

$$\Leftrightarrow \ln(B) = \ln(e^a) + \ln(e^b)$$

$$\Leftrightarrow \ln(B) = a+b \quad , \quad (2)$$

حسب (1) و (2) نحصل على $\ln(A) = \ln(B)$ إذن: $A = B$ أي $e^{a+b} = e^a \times e^b$.خلاصة: $e^{a+b} = e^a \times e^b$

3. ملحوظة:

الكتابة: $e^x \times e^x \times e^x = (e^x)^3 = e^{3x}$ و $e^x \times e^x = (e^x)^2 = e^{2x}$.بصفة عامة: $\underbrace{e^x \times e^x \times \dots \times e^x}_n = (e^x)^n = e^{nx}$



III مشتقة الدالة الأسية:

1. خاصية:

الدالة $f(x) = e^x$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و لدينا : $(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

بمأن الدالة $f(x) = \ln(x)$ قابلة للاشتقاق على $I =]0, +\infty[$ و دالتها المشتقة $f'(x) = \frac{1}{x}$ لا تنعدم على هذا المجال فإن دالتها العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

لدينا : $(e^x)' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \frac{1}{f'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

خلاصة : $(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2. خاصية:

$u(x)$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $f(x) = e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و دالتها المشتقة تحقق ما يلي:

$$f'(x) = [e^{u(x)}]' = u'(x) e^{u(x)}$$

تطبيق: أحسب الدالة المشتقة ل: $f(x) = e^{5x^3+3x}$

جواب : $f'(x) = [e^{5x^3+3x}]' = (5x^3 + 3x) \times e^{5x^3+3x} = (15x^2 + 3)e^{5x^3+3x}$

3. ملحوظة:

الدوال الأصلية للدالة ل: $g(x) = u'(x) e^{u(x)}$ هي الدوال التي على شكل: $G(x) = e^{u(x)} + c ; (c \in \mathbb{R})$

4. تطبيق:

وجد الدوال الأصلية ل: $f(x) = x \cdot e^{3x^2+1}$ هي $F(x) = \frac{1}{6} e^{3x^2+1} + c$

IV نهايات اعتيادية ل $f(x) = e^x$

1. نهايات اعتيادية

نهايات يجب معرفتها

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \times e^x = 0^-$	1
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	2
$(n \in \mathbb{N}^*)$ مع $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \times e^x = 0$	3
$n \in \mathbb{N}^*$ مع $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$	4

تأويل الهندسي لنتيجة	نهايات $f(x) = e^x$
الدالة f تقبل مقارب أفقي معادلته: $y = 0$ (اي محور الأفاصيل) بجوار $-\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$
ومنه يجب دراسة الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
الدالة f تقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

2. برهان:



أ - لنهاية اعتيادية : مثلاً : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. (يمكن استنتاج هذه النهاية من خلال $f(x) = \ln(x)$ و دالتها العكسية $f^{-1}(x) = e^x$)

نضع : $e^x = x$ إذن : $x \rightarrow +\infty$ فإن : $X \rightarrow +\infty$ وكذلك $x = \ln(X)$.

ومنه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$

خلاصة : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

ب - لنهاية يجب معرفتها : مثلاً : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ مع $n \in \mathbb{N}^*$

نضع : $X = \frac{x}{n}$ إذن : $x \rightarrow +\infty$ فإن : $X \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{nX}}{(nX)^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^X}{nX} \right)^n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^n} \left(\frac{e^X}{X} \right)^n = +\infty$$

3. تطبيق 1 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x}$$

$$\text{طريقة 1 : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \times e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \times e^x = +\infty$$

$$\text{طريقة 2 : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty \text{ مع } t = 2x$$

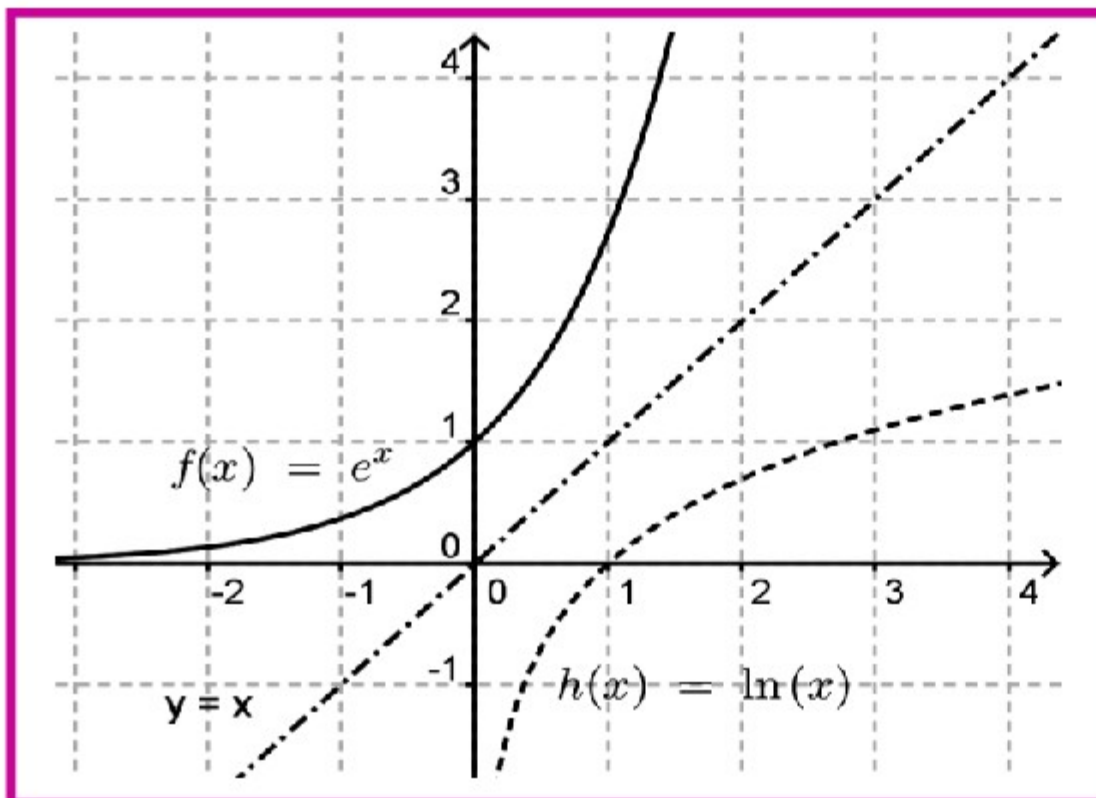
$$\text{تطبيق 2 : أحسب : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2x}{x^3}$$

V. دراسة الدالة $f(x) = e^x$:

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	$+\infty$
f'		+
f	0	$+\infty$

إنشاء منحنى الدالة f في م.م.م (0, i, j)



VI. الدالة الأسية للأساس a مع: $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$

1. تعريف:

ليكن a من $]0,1[\cup]1,+\infty[$. الدالة المعرفة كما يلي: $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ $\forall x > 0$ هي متصلة ورتيبة قطعاً على $]0,+\infty[$ هي

تقابل و تقابلها العكسي f^{-1} يسمى الدالة الاسية للأساس a و معرفة كما يلي :

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]0,+\infty[$$

$$x \rightarrow f^{-1}(x) = e^{x \ln a}$$

2. توضيح:

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \log_a(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = x$$

$$\Leftrightarrow \ln(y) = x \ln(a)$$

$$\Leftrightarrow y = e^{x \ln(a)}$$

إن: $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow e^{x \ln(a)} = y$

3. كتابة جديدة لـ $f^{-1}(x) = e^{x \ln a}$

نأخذ: r من \mathbb{Q} نحصل على $a^r = e^{r \ln a} = e^{r \ln a}$

وهذا يدفعنا لتمديد هذه الكتابة على باقي الأعداد الحقيقية x ومنه: نكتب $f^{-1}(x) = e^{x \ln a} = a^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

خلاصة: $\forall x \in \mathbb{R}, e^{x \ln a} = a^x$

4. مثال:

$$5^x = e^{x \ln 5} \quad \text{و} \quad \left(\frac{1}{5}\right)^x = e^{-x \ln 5} \quad \text{و} \quad 10^x = e^{x \ln 10}$$

5. ملحوظة: لكل x من \mathbb{R} : $\log_a(a^x) = x$ و لكل $x > 0$: $a^{\log_a(x)} = x$ و $10^x = y \Leftrightarrow x = \text{Log}(y)$

6. تذكير لمراحل تعريف الأس:

• القوة ذات الأس الصحيح الطبيعي: $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n$ مع $a^1 = a$ و $a^0 = 1$.

• القوة ذات الأس الصحيح النسبي: $\forall p > 0, a^p = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_p$ و $\forall p < 0, a^p = \frac{1}{a^{-p}}$ مع $a^1 = a$ و $a^0 = 1$.

• القوة ذات الأس الجذري: $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (مع $p \in \mathbb{Z}$ و $q \in \mathbb{N}^*$) $(a > 0)$ $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ $\forall r \in \mathbb{Q}$.

• القوة ذات الأس عدد حقيقي $\forall x \in \mathbb{R}, a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$



ليكن a من $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ و الدالة $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$

(1) f معرفة و متصلة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

$$[f(x)]' = (a^x)' = (\ln(a)) \times e^{x \ln a} = (\ln(a)) \times a^x \quad (2)$$

(3) ومنه إشارة: $[f(x)]' = (a^x)' = (\ln(a)) \times a^x$ هي إشارة $\ln a$:

• إذا كان: $0 < a < 1$ فإن: $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ تناقصية:

$$\text{ومنه: } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$$

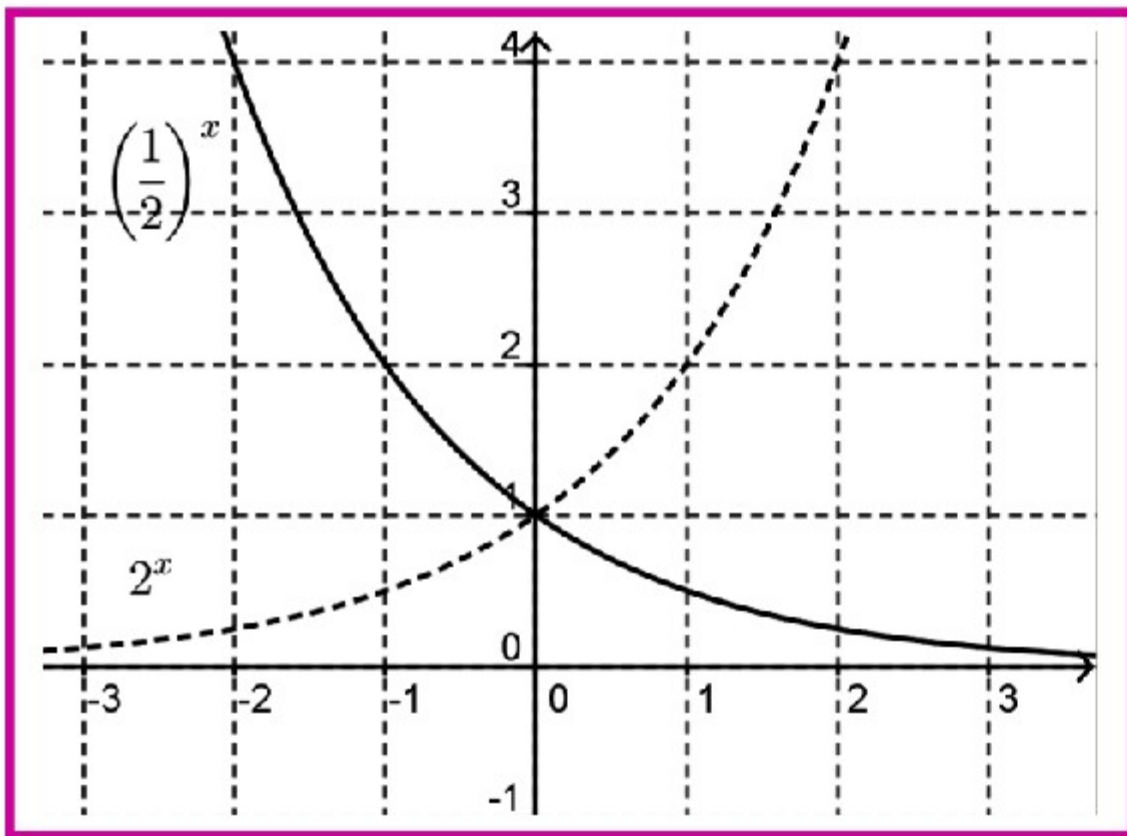
• إذا كان: $a > 1$ فإن: $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ تزايدية:

$$\text{ومنه: } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$$

لكل x و y من \mathbb{R} :

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad \text{و} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \text{و} \quad \frac{1}{a^x} = a^{-x} \quad \text{و} \quad a^x \times a^y = a^{x+y}$$



إنشاء منحنى الدالة: f في م.م. مع $(0, i, j)$

حالة 1: $0 < a < 1$ نأخذ: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

حالة 2: $a > 1$ نأخذ: $f(x) = 2^x$.

(1) أكتب الدالة الآتية باستعمال الدالة الأسية النيبيرية: $f(x) = 3^{x^3 - x}$

(2) حدد مجموعة تعريف f .

(3) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(4) ثم أحسب الدالة المشتقة f' ل f .