مذكرة رقم : 6 **الأستاذ : عثماني نجيب**

مذكرة رقم6 في درس الدوال الأسية

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- الدالة الأسية النبيرية؛ الرمز exp؛ العدد e و الكتابة e^x؛ - الصيغ e^{a+b} ؛ e^{a-b} ؛ e^{-a} ؛ $(e^a)^n \quad (n\in Z)$؛ - دراسة وتمثيل الدالة $x\to e^x$؛	- حل معادلات ومتراجحات ونظمات أسية نبيرية لا يكتسي حلها صعوبة؛ - استعمال الآلة الحاسبة لتحديد قيم مقربة للعدد e^a حيث عدد حقيقي a أو تحديد قيمة مقربة لعدد a بحيث e^a عدد معلوم؛ - دراسة وتمثيل دوال بسيطة تحتوي صيغها على الدالة الأسية النبيرية؛	- نقبل في هذا المستوى أن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ وتعتبر ان نهايتين أساسيتين؛ - إبراز العلاقة: $e^a=b \Leftrightarrow \begin{cases} a=\ln b \\ b>0\end{cases}$؛ واستعمالها في حل معادلات ومتراجحات ونظمات.

1) تعريف الدالة الأسية النبيرية

الدالة الأسية النبيرية يرمز لها ب exp وهي معرفة على $\mathbb{R}$ ب :

$(\forall x\in\mathbb{R});\exp x=e^x$

2) خاصية مقبولة

$(\forall y\in\mathbb{R})(\forall x\in]0;+\infty[)$ ، $(x=e^y \Leftrightarrow \ln(x)=y)$

الدالة exp تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ يعني $e^x>e^y \Leftrightarrow x>y$

$e^x=e^y \Leftrightarrow x=y$ لكل x و y من $\mathbb{R}$

ولدينا: $e^0=1$ و $e^1=e$

مثال : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: 1) $e^x=1$ 2) $e^{x-2}=e$ 3) $e^x=2$

الحل: 1) $e^x=1 \Leftrightarrow e^x=e^0$

$\Leftrightarrow x=0$ ومنه : $S=\{0\}$

2) $e^{x-2}=e \Leftrightarrow e^{x-2}=e^1$

$\Leftrightarrow x-2=1 \Leftrightarrow x=3$ ومنه : $S=\{3\}$

3) $e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$ ومنه : $S=\{\ln 2\}$

خاصيات جبرية

$(\forall x\in\mathbb{R});\ln(e^x)=x$ $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})$

$(\forall x\in\mathbb{R})e^x\succ 0$ و $e^x\times e^y=e^{x+y}$ و $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$ و $\dfrac{e^x}{e^y}=e^{x-y}$ و $e^{rx}=(e^x)^r$

مثال : ليكن a و b عددين حقيقيين, أحسب وبسط ما يلي : $A=e^3\times e^5$ و $B=(e^{-4}\times e^6)^3$ و $C=\dfrac{e^7}{e^4}$

الحل: $A=e^3\times e^5=e^{3+5}=e^8$ و $B=(e^{-4}\times e^6)^3=(e^{-4+6})^3=(e^2)^3=e^{2\times3}=e^6$ و $C=\dfrac{e^7}{e^4}=e^{7-4}=e^3$

تمرين1: بسط ما يلي: $A=e^{-x}\times e^{2x}$ ، $B=(e^{2-x})^2\times e^{3x-4}$ $C=\dfrac{e^{2x}\times e^{3x}}{(e^x)^4}$

الحل: $A=e^{-x}\times e^{2x}=e^{-x+2x}=e^x$ و $B=(e^{2-x})^2\times e^{3x-4}=e^{2\times(2-x)}\times e^{3x-4}=e^{2\times(2-x)+3x-4}=e^{4-2x+3x-4}=e^x$

$C=\dfrac{e^{2x}\times e^{3x}}{(e^x)^4}=\dfrac{e^{2x+3x}}{e^{4x}}=\dfrac{e^{5x}}{e^{4x}}=e^{5x-4x}=e^x$

تمرين2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: 1) $e^{x+1}=4$

2) $e^{1-x}\times e^{2x}=e$ 3) $e^{1+x}=\dfrac{1}{e^{2x-3}}$ 4) $\dfrac{e^{2-x}}{e^{1+2x}}=e^{x-1}$ 5) $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-3}}=e$ 6) $e^{2x}-5e^x+6=0$

الحل: 1) $e^{1-x}\times e^{2x}=e \Leftrightarrow e^{1-x+2x}=e^1$

$\Leftrightarrow e^{1+x}=e^1 \Leftrightarrow 1+x=1 \Leftrightarrow x=0$ ومنه : $S=\{0\}$

2) $e^{x-2}=e \Leftrightarrow e^{x-2}=e^1$

$\Leftrightarrow x-2=1 \Leftrightarrow x=3$ ومنه : $S=\{3\}$

3) $e^{1+x}=\dfrac{1}{e^{2x-3}} \Leftrightarrow e^{1+x}=e^{-(2x-3)}$

$\Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow 1+x=-2x+3 \Leftrightarrow e^{1+x}=e^{-2x+3}$ $\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ ومنه : $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

4) $\frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}}=e^{x-1} \Leftrightarrow e^{(2-x)-(1+2x)}=e^{x-1}$

$\Leftrightarrow x-1=(2-x)-(1+2x) \Leftrightarrow 2-x-1-2x=x-1$

$\Leftrightarrow -1+1-2=-x-2x-x \Leftrightarrow -4x=-2 \Leftrightarrow x=\frac{-2}{-4} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ ومنه : $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

5) $\frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}}=e \Leftrightarrow e^{(2x+1)-(x-3)}=e^{1} \Leftrightarrow e^{2x+1-x+3}=e^{1}$

$\Leftrightarrow 2x+1-x+3=1 \Leftrightarrow x+4=1 \Leftrightarrow x=-3$ ومنه : $S=\{-3\}$

تمرين3: حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات الآتية :

1. $f(x)=xe^{x}+2x$
2. $f(x)=\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$

الحل: 1) $D_f=\mathbb{R}$

2) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/e^{x}-1\neq 0\}$

$e^{x}-1=0 \Leftrightarrow e^{x}=1 \Leftrightarrow e^{x}=e^{0} \Leftrightarrow x=0$ ومنه : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

تمرين4: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $e^{2x-1}\geq 1$ (2 $e^{7x-1}\geq e^{2x-3}\times e^{x-2}$

الحل: 1) $e^{2x-1}\geq 1 \Leftrightarrow e^{2x-1}\geq e^{0} \Leftrightarrow 2x-1\geq 0$

$\Leftrightarrow 2x\geq 1 \Leftrightarrow x\geq\frac{1}{2}$ ومنه : $S=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

2) $e^{7x-1}\geq e^{2x-3}\times e^{x-2} \Leftrightarrow e^{7x-1}\geq e^{2x-3+x-2}$

$\Leftrightarrow 7x-1\geq 2x-3+x-2 \Leftrightarrow 4x\geq -4$

$\Leftrightarrow x\geq -1$ ومنه : $S=[-1;+\infty[$

3) **النهايات :**

نقبل النهايتين التاليتين

خاصية1 : $\lim_{x\to-\infty} e^{x}=0$ و **خاصية2 :** $\lim_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$

تمرين5: أحسب النهايات الآتية:

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\frac{1}{e^{x}}\right)$ (2 $\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x}-1}{e^{x}+2}$ (3 $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{e^{x}+3}$ (4 $\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^{x}-1}{e^{x}+1}$

الحل: 1) لدينا $\lim_{x\to+\infty} 2x=+\infty$ ولدينا: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0$ لأن: $\lim_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ اذن : $\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\frac{1}{e^{x}}\right)=+\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x}-1}{e^{x}+2}=\frac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x}-1}{e^{x}+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}\left(2-\frac{1}{e^{x}}\right)}{e^{x}\left(1+\frac{2}{e^{x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{e^{x}}}{1+\frac{2}{e^{x}}}=\frac{2-0}{1+0}=2$ لأن: $\lim_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$

3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}}{e^{x}+3}=\frac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{e^{x}+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{e^{x}\left(1+\frac{3}{e^{x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{e^{x}}}=\frac{1}{1+0}=1$ لأن: $\lim_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$

4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^{x}-1}{e^{x}+1}=\frac{2\times 0-1}{0+1}=-1$

4) **مشتقة الدالة.** $x\mapsto e^{x}$

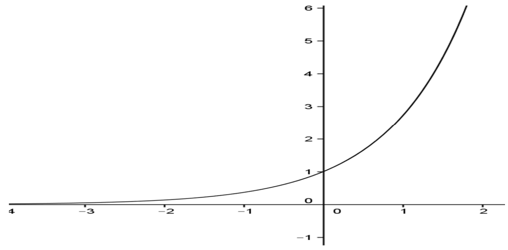
نقبل أن الدالة exp قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لدينا: $(\forall x\in\mathbb{R})\quad :(e^{x})'=e^{x}$

5) **جدول تغيرات الدالة** $x \to e^x$:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

6) **منحنى الدالة** exp :



تمرين6: أحسب $f'(x)$ في الحالات الآتية :

$f(x)=e^x+2$ (1 $\quad$ $f(x)=xe^x+3x$ (2 $\quad$ $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ (3

الحل: 1) $f'(x)=\left(e^x+2\right)'=\left(e^x\right)'+\left(2\right)'=e^x+0=e^x$

2) $f'(x)=\left(xe^x+3x\right)'=\left(xe^x\right)'+\left(3x\right)'=\left(x\right)'e^x+x\left(e^x\right)'+3=e^x+xe^x+3$

3) $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)'=\dfrac{\left(e^x-1\right)'\times\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)\times\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}$

$f'(x)=\dfrac{e^x\times\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)\times e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{e^x\times e^x+e^x-e^x\times e^x+e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

تمرين7: نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x)=e^x+3x$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2) أحسب $f(0)$ و $f(1)$ (أعط قيمة مقربة للنتائج)

3) أحسب $f'(x)$ و وبين أن الدالة f تزايدية قطعا على D_f

4) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

5) حددجدول تغيرات الدالة f

الحل: 1) $D_f=\mathbb{R}$

2) $f(0)=e^0+3\times0=1-0=1$

$f(1)=e^1+3\times1=e+3\simeq2,7+3\simeq5,7$

3) $f'(x)=\left(e^x+3x\right)'=\left(e^x\right)'+\left(3x\right)'=e^x+3>0$

لأن: $(\forall x\in\mathbb{R})\,e^x>0$ ومنه f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

4) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+3x=0+3(-\infty)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+3x=+\infty+3(+\infty)=+\infty$

5) جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$