

التمرين رقم : 01

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \log_2(x) - \log_x(2) & , x \in]0, +\infty[- \{1\} \\ f(x) = e^{\frac{x^2+1}{x}} & , x \in]-\infty, 0[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

و (C_f) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

1- أ - أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب - بين أن الدالة f متصلة على اليسار في 0

2- 1 - بين أن : $(\forall x < 0) \frac{f(x)}{x} = \left(\frac{1}{x} e^x\right) e^{\frac{x^2}{2}}$

ب - أدرس اشتقاق الدالة f على يسار 0 ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها

3- أ- بين أن :

$$(\forall x < 0) \frac{f(x)}{x} = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{e^{\frac{x^2+1}{x}}}{\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}}\right)$$

ب - استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها

ج - حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

4- أ - بين أن :

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{(\ln x)^2} \right) & , x \in]0, +\infty[- \{1\} \\ f'(x) = \left(\frac{x^3-1}{x^2} \right) e^{\frac{x^2+1}{x}} & , x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

ب - استنتج جدولا لتغيرات الدالة f

5- أ - حل في $]0, +\infty[- \{1\}$ المعادلة: $f(x) = 0$ ثم

استنتج أفاصيل نقاط تقاطع (C_f) مع محور الأفاصيل

ب - أنشئ في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) المنحنى (C_f)

التمرين رقم : 02

لكل $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x

المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي: $f_n(x) = \frac{1+n \ln x}{x^2}$

و (C_n) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

الجزء الأول:

1- أ - أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

وأول هندسيا النتيجتين المحصل عليهما

ب - بين أن:

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f_n'(x) = \frac{n-2-2n \ln x}{x^3}$$

ج - لكل $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ أحسب $f\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right)$ بدلالة n

د - استنتج جدولا لتغيرات الدالة f_n على $]0, +\infty[$

2- أ - أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1})

ب - أنشئ المنحنيين (C_2) و (C_3) في نفس المعلم المتعامد

الممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) ($e^{\frac{1}{6}} \approx 1,18$ و $e^{\frac{1}{6}} \approx 1,08$) $f_3\left(e^{\frac{1}{6}}\right)$

الجزء الثاني:

نفترض في هذا الجزء أن $n \geq 3$

1- أ - تحقق أن $(\forall n \geq 3) f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) > 1$

ب - تحقق أن المعادلة $f_n(x) = 1$ لا تقبل حلا في المجال

$$\left]1, e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$$

2 - بين أن المعادلة $f_n(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال

$$\left[e^{\frac{n-2}{2n}}, +\infty\right[$$

3- أ - بين أن: $f_n(\sqrt{n}) \geq 1$ لكل $n > e^2$

ب - استنتج أن : $\alpha_n \geq \sqrt{n}$ ($\forall n \geq 8$) و حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

الجزء الأول:

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]-\infty, 0[$ بما يلي: $g(x) = \frac{1-x}{x} - \ln(-x)$

1- a - أحسب $g'(x)$ وضع جدولاً لتغيرات الدالة g

b - استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty, 0[$

الجزء الثاني:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = e^{x^2-x+\ln x} & , x > 0 \\ f(x) = (-x)^{(1-x)} & , x < 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

و (C_f) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$)

1 - أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

2- a - أدرس اتصال الدالة f في النقطة 0

b - أدرس اشتقاق الدالة f في النقطة 0 ثم أول النتيجة هندسيا

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x} f(x) & , x > 0 \\ f'(x) = g(x) f(x) & , x < 0 \end{cases} \quad \text{a-3 - بين أن:}$$

b - استنتج جدولاً لتغيرات الدالة f

4- a - بين أن: $(\forall x \in]-\infty, 0[) \quad f(x) + x = -x (e^{-x \ln(-x)} - 1)$

b - استنتج وضع قصور المنحنى (C_f) على $]-\infty, 0[$ بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة: $y = -x$

c - ادرس وضع قصور المنحنى (C_f) على $]0, +\infty[$ بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة: $y = x$

5 - أنشئ المنحنى (C_f)

الجزء الثالث:

تعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة كما يلي: $\begin{cases} U_0 \in]0, 1[\\ U_{n+1} = e^{U_n^2 - U_n + \ln(U_n)} \end{cases} , (\forall n \in \mathbb{N})$

1 - بين أن لكل n من \mathbb{N} لدينا: $0 < U_n \leq 1$

2 - تحقق أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} - U_n = U_n (e^{U_n(U_n-1)} - 1)$

3 - استنتج أن المتتالية (U_n) تناقصية و أنها متقاربة

أتمرين رقم : 03

الجزء الأول:

التمرين رقم : 04

لتكن h الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي: $h(x) = \text{Arc tan } x - x + \frac{x^3}{3}$

$$1 - \text{بين أن: } (\forall x \in \mathbb{R}) \quad 1 - x^2 \leq \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1 - x^2 + x^4$$

$$2 - \text{a - بين أن: } (\forall x \in \mathbb{R}) \quad |h'(x)| \leq x^4$$

$$b - \text{استنتج أن: } (\forall x \in \mathbb{R}) \quad |h(x) - h(0)| \leq |x|^5$$

$$c - \text{بين أن: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan } x - x}{x^2} = 0$$

الجزء الثاني:

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]-1, +\infty[$ بما يلي: $g(x) = \frac{x}{2x^2 + 2x + 1} - \text{Arc tan}\left(\frac{x}{x+1}\right)$

1 - أدرس تغيرات الدالة g

$$2 - \text{بين أن المعادلة } g(x) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا غير منعدما } \alpha \text{ من المجال } \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$$

$$3 - \text{استنتج إشارة } g(x) \text{ على المجال }]-1, +\infty[$$

الجزء الثالث:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{\text{Arc tan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - x}{x}, \quad x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[\\ f(0) = 0 \\ f(-1) = \frac{\pi}{2} - 1 \end{array} \right.$$

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي:

و (C_f) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

$$1 - \text{بين أن } f \text{ متصلة على المجال }]-1, +\infty[$$

$$2 - \text{a - أحسب النهاية: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - x}{x^2} \text{ ثم أول النتيجة المحصل عليها مبيانيا}$$

$$b - \text{أدرس قابلية اشتقاق الدالة } f \text{ على يمين النقطة } -1$$

3 - أدرس تغيرات الدالة f

$$4 - \text{أنشئ المنحنى } (C_f) \text{ (نأخذ } \alpha \approx \frac{-3}{4} \text{ و } \frac{2}{3} = f(\alpha)$$